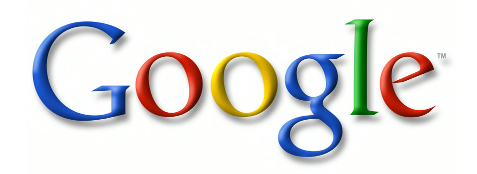
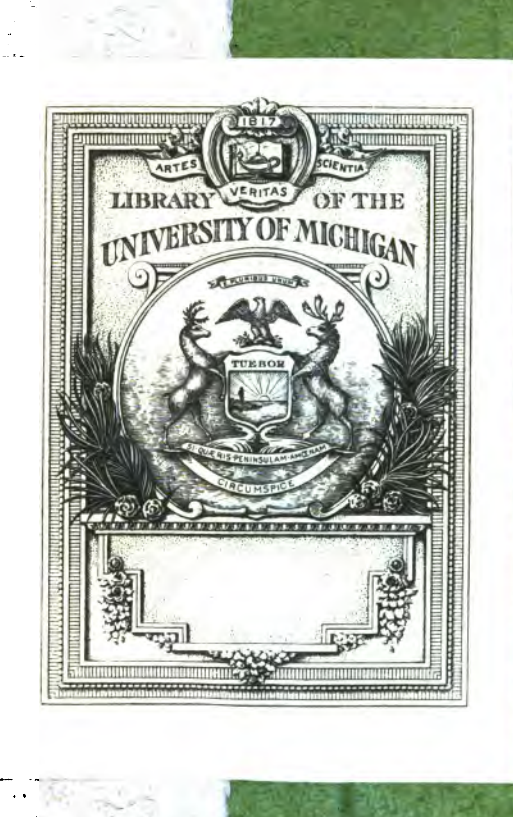
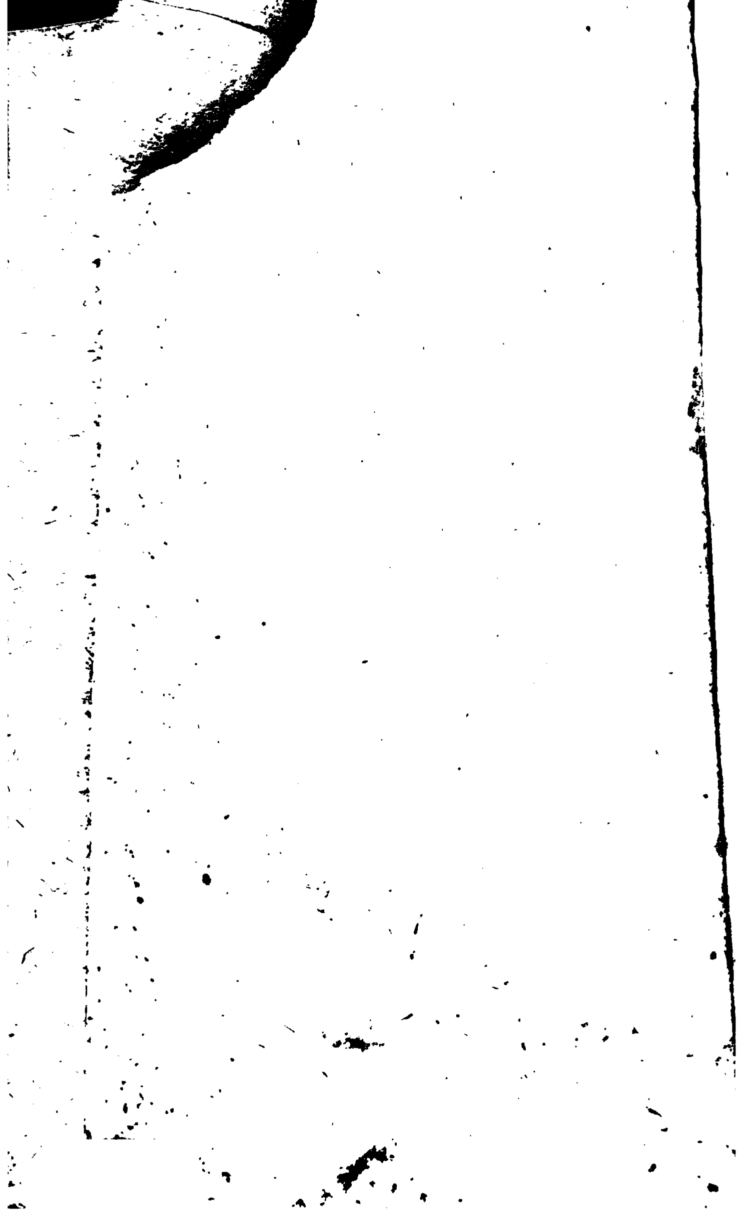



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE







Gottfr. Eichler del. Jac. Andr. Fridrich Ser. Duc. Würt. Sculptor aulicus Sc. A.V.

D. Heinrich Wilhelm Clemms,
Doctor und Prof. der Theologie auf der Universität Tübingen rc. rc.

Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften.

Neue verbesserte Auflage.



Stutgart,
verlegts Johann Benedict Mezler.
1777.

von meinen Zuhörern, welchen ich, diesen Sommer über, die einzele aus der Druckerey nach und nach gekommene Bögen erklärt habe, ehe sie mich noch hörten, das meiste verstanden, und von sich selbst durch das blosse Lesen begriffen haben; dahero billig vermuthe, daß diese Schrift bey andern aufmerksamen Lesern eine gleiche Wirkung haben, und vielleicht mit mehrerem Vergnügen gelesen werde, als manche blos zum Zeitvertreib gekaufte Bücher.

Die Absicht, warum ich schreibe, hiesse mich also vorzüglich faßlich und deutlich seyn. Darum mußte ich zuweilen weitläuftig werden. Aus eben diesem Grunde vermiede ich das schulmässige in der Schreibart, und erwählte

wählte für die am Rand sonsten beygesetzte Namen der Grund-Lehr-Zusätze, u. s. w. solche Marginalien, welche dem Leser den Innhalt des Textes viel deutlicher, als diese Worte, sagen. Wann man die Marginalien selbst in kurze Sätze verwandelt, so hat man einen Auszug oder eine Sammlung von Erklärungen und Lehrsätzen, die ich selbst in dieser Form würde angehängt haben, wenn ich es für nöthig erachtet hätte, einerley Sachen zweymal zu sagen, oder die Mathematik in ein Gedächtniswerk zu verwandeln.

Was die Figuren betrift, so hat man deren zwar nicht viel, aber doch so viel, als man nöthig hat. Ich habe auch dißfalls die Lehrart der Alten, welche ihre Zeichnungen so kurz, als

möglich war, vorgetragen hatten, um so eher befolget, weil oft manche Leser die allzuviele Figuren entweder blos bewundern, oder auch gar eben wegen ihrer Menge scheuen. Beedes habe ich zu vermeiden gesucht. Man findet dahero in den meinigen blos die Euclideische und einige neuere Zeichnungen, aber keine Mahlereyen.

Bey der Ausarbeitung des Werks selbsten befleissigte ich mich der Deutlichkeit, aber einer solchen, welche denen, die aus andern Schriften schon die Mathematik erlernet hatten, durch keine unnöthige Neuerungen verdrüßlich werden sollte. Darum habe ich die vom Herrn Baron von Wolf geschöpfte Namen und Ausdrücke mehrentheils beybehalten, ob ich schon

übri-

übrigens die Mathematik in einem ganz andern Kleide vorstelle.

Wie ich nun von meinen ehemaligen Lehrern, dem seligen Herrn Professor Kraft, und von dem weitberühmten Herrn Professor Euler zu Petersburg in dieser Wissenschaft nicht wenig gelernet habe, so wird man nach beliebiger Durchblätterung des Werkes bey denjenigen Stellen, wo ich ihre Schriften anführe, die Beweise meiner Hochachtung und Dankbarkeit gegen diese Männer erkennen, zugleich aber auch urtheilen, wieferne ich nach dem Zweck dieses Buchs eine eigene Arbeit geliefert habe.

In Rucksicht auf die Menge der Schriften dieser Art weiß ich seit hundert und mehr Jahren wenigstens in un=

unserm Lande keinen, der die reine Mathematik nach allen ihren Haupttheilen vorgetragen hätte, ausser den ehmaligen Abten in Bebenhausen, Johann Jacob Hainlin, welcher im Jahr 1653. eine Synopsin mathematicam für diejenige, die in dem Würtembergischen studieren, nach der Lehrart selbiger Zeiten, und so weit man damals gekommen war, herausgegeben. Inzwischen, und seit dieser Zeit, sind zwar je und je verschiedene Rechenbücher, Geometrien, auch algebraische Abhandlungen, aber nur einzel, und so ans Licht getretten, daß ein Leser vielerley Bücher und noch dazu von unterschiedenen Verfassern zusammen kaufen müßte, wenn er etwas ganzes in der Mathematik haben wollte.

wollte. Im gegenwärtigem Buche hingegen findet man alles beysammen, was zu der sogenannten reinen Mathematik, folglich zu den ersten Gründen aller mathematischen Wissenschaften, gehöret, welche sich hernach so wohl auf die Naturlehre als auch auf andere Disciplinen anwenden lassen. Das weitere von dieser Benennung lieset man in der Einleitung.

Soll ich endlich noch etwas vom Gebrauch dieser Wissenschaft sagen, so dünkt mich, sie seye weit geschickter unsern Verstand zu bilden, als dasjenige, was heut zu Tag den Geschmack vieler Studierenden ausmacht, und was der berühmte Herr Hofrath Kästner in einer artigen Parodie zu

tadeln scheint, wenn er einem witzigen Freund in sein Stammbuch schreibt: (*

O könnte dich ein Schatten rühren,
Der Wohllust, die die Herzen spühren,
Die sich der Meßkunst zugedacht!
Du foderrest von dem Geschicke
Die leeren Stunden noch zurücke,
Die du mit Liedern zugebracht! *)

Inzwischen muß man doch in dem Lob der Mathematik nicht zu weit gehen, und auch von dem größten Meßkündigen eben so denken, wie der schon gerühmte Gelehrte an einem andern Ort schreibt:

Auch Newtons Alter selbst verbaucht
mit Newtons Fleiß,
Macht nur bey Sterblichen ihn zum
gelehrten Greiß!

Die

*) Man sehe Herrn Hofrath Kästners vermischte Schriften.

Die Mathematik ist wirklich die schönste und zuverlässigste Wissenschaft: aber nur für die Bewunderung eines Sterblichen. Dann so schön sie auch ist, und so einen grossen Vorzug sie vor allen andern auch philosophischen Tändeleyen der Sterblichen hat, so ist sie doch kaum der allergeringste Theil derjenigen Weisheit, welche einen für die Ewigkeit geschaffenen Geist wahrhaftig vergnügen und ergötzen kann.

Schriebs auf die Michaelis-Messe
1759.

der Verfasser.

Vor-



Vorrede
zur
zweyten Auflage.

Da meine mathematische Bücher so glücklich gewesen, den Beyfall der Kenner zu erhalten, so lasse ich es nicht nur geschehen, daß auch von gegenwärtigen Anfangsgründen, wie von dem mathem. Lehrbuch, eine neue Auflage veranstaltet wird, sondern freue mich besonders, daß das deutsche Publicum den Geschmack an einer Wissenschaft, wozu Verstand, Fleiß und Nachdenken gehöret, noch immer

immer unterhält. Dieses nebst dem Beyfall der Klugen ist die größte Belohnung, die sich ein Schriftsteller wünschen kann, dem es darum zu thun ist, dem Publico gewissenhaft zu dienen, und nützlich zu werden.

Weiter weiß ich bey dieser neuen Ausgabe nichts hinzu zu sagen, als daß ich mit Vorbedacht die Einrichtung mehrentheils ungeändert gelassen, auch nur wenige Zusätze gemacht habe, z. E. S. 15. S. 191-193. S. 372. S. 410. u. s. w. weil ich in der neuen Ausgabe meines mathematischen Lehrbuchs dasjenige hinlänglich vorgetragen, was man zur jetzigen Vollstän-

ständigkeit dieser Wissenschaft verlangen möchte. Uebrigens werden Anfänger, wenn sie diese erste Gründe zuerst lesen, auch nachgehends das Lehrbuch selbst ohne weiteren mündlichen Unterricht lesen und verstehen können.

Schriebs Tübingen,
den 15. Hornung
1769.

Heinrich Wilhelm Clemm,
der h. Schrift Doctor und offentl. Professor der Theol. auf der Universität Tübingen, wie auch Superintendens und Pastor daselbst.

Ein



Einleitung.

§. 1.

Ursprung des Namens der Mathematik.

Die Mathematik kann nach dem Ursprung ihres griechischen Namens so gut die einige Wissenschaft in der Welt heissen, als die Werke der Poeten nach gleicher Bedeutung des griechischen Worts die einige Werke seyn sollen, die sich in die Welt schreiben und lesen lassen. Anfangs waren die Sprachen noch rauh, hart, ungekünstelt, und nur nach der Nothdurft eingerichtet, folglich an keine Regeln gebunden. Allein die Poeten gaben ihnen zuerst durch ihre Arbeiten eine Gestalt, und erhielten zur Belohnung dafür den Namen, den sie jezo noch tragen, nemlich den Namen der Schriftsteller, oder der Autoren: denn ein Poet, das ist derjenige, der etwas macht, schreibt, oder heraus giebt, und ein Schriftsteller hatten vor Zeiten im Griechischen einerley Be-

deutung. Daher kommt es auch, daß die älteste Scribenten der Griechen, was sie nur immer geschrieben, mehrentheils in Versen geschrieben haben. Die mathematische Wissenschaften haben in Rucksicht auf ihren Namen einen fast gleichen Ursprung. Als die Welt noch junge war, fanden sich schon Leute, welche die verschiedene Grössen der Felder und Ländereyen mit einander verglichen, und die erste Gründe der Meßkunst ausdachten. Sie sahen, daß die davon erlangte Wissenschaft zuverlässig und gründlich seye; dahero nachgehends bey den Griechen die Meßkundigen selbst, oder diejenigen, die sie ehren wollten, den Namen der Mathematik oder einzigen Disciplin, weil man vielleicht damals noch keine andere hatte, erfunden und dieser Wissenschaft beygelegt haben mögen. Unerachtet es nun heut zu Tag noch viele andere Mathemata oder Disciplinen giebt, welche in der That zuverlässig und zu wissen gleich nöthig sind; so ist doch der mathematische Name den Meßkünstlern immer eigen geblieben und wird ihnen noch lange eigen bleiben, es mag hernach das hohe Alter dieser Wissenschaft, oder ihre unläugbare Gründlichkeit, oder ihr allgemeiner Nutzen, oder die billige Neigung, alte Namen nicht ohne Grund zu ändern, die Ursache davon seyn.

Warum er der Meßkunst beygelegt,

und noch bis jezo beybehalten worden seye?

§. 2

§. 2. Wir haben von dem Ursprung des Worts das nöthigste gesagt, unerachtet wir eben nicht gesonnen sind, der Mathematik eine Lobrede zu schreiben, und sie als die vornehmste, vielweniger als die einige Disciplin, unsern Lesern anzurühmen. Die Eitelkeit der Alten, und auch einiger Neuern, gehet hier zu weit. Das allersubtilste und schärfste Messer hat seinen Nutzen, aber man braucht es eben nicht, Brod damit zu schneiden. Zu diesem Zweck sind andere noch besser dienlich. So geht es auch mit der Mathematik. Wenn man sich allein mit Hintansetzung aller andern gleichguten Wissenschaften darauf leget; so ahmt man den Poeten nach, welche gemeiniglich darben, wenn sie ihre schöne Wissenschaften nicht auch mit andern verbunden haben. Wer aber die Mathematik in derjenigen Absicht erlernet, daß er seine übrige Wissenschaften, es mögen hernach theologische oder andere seyn, desto gründlicher fasse; der wird einen wahren und bleibenden Nutzen in seinem ganzen Leben davon haben, und diejenige Stunden nicht bereuen, welche er auf eine Arbeit verwandt hat, die den Kopf nicht nur aufräumet, sondern auch die Ordnung im Denken, die Aufmerksamkeit, die Deutlichkeit, und die Fähigkeit, neue Wahrheiten zu erfinden, immer höher bringet.

In wie ferne die Mathematik ein vorzügliches Lob verdiene, und was sie bey allen Wissenschaften für einen Nutzen habe.

Was die Absicht gegenwärtiger Arbeit seye;

§. 3. Dieser Absicht ist nun unsere gegenwärtige Abhandlung gewidmet. Ich werde die mathematische Wissenschaften, doch ohne weiter auf die praktische Anwendung bey den vielerley Rechnungen, dem Feldmessen, im eigentlichen Verstand, und den übrigen durch die Mathematik empor gekommenen Künsten mein Augenmerk besonders zu richten, nur in so fern zu erläutern und deutlich zu machen suchen, daß der Verstand des Menschen zur gründlichen Erkänntniß höherer Wissenschaften nach und nach zubereitet werde. Die Mechanik, die Astronomie, die Gnomonik, die bürgerliche und Militarbaukunst, die Wasserkünste sowohl in Ansehung des stehenden als des bewegten Wassers, sind eigene und besondere Wissenschaften, deren jegliche ihre Kenner belohnet: denn unerachtet ohne die erste Grundsätze der Mathematik keine gründlich gefaßt wird, so ist doch jedesmal eine ohne die andere in ihrer Art etwas ganzes, und kann als eine besondere Wissenschaft erlernt werden. Es giebt Mechanikverständige, die in ihrer Kunst vollkommen sind, ohne daß sie deswegen Astronomen zugleich seyn müßten. Eben so hat man vortreffliche Baumeister, die deswegen noch keine Ingenieur sind, wie auch die besten Ingenieur nicht allemal die beste Baumeister bey Civilgebäuden sind.

und warum die praktische oder anwendende Mathematik nicht auch vorgetragen werde.

Wir

Wir sehen uns daher keineswegs genöthiget, die erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften mit der anwendenden Mathematik dißmalen zu vermehren, da ohnehin der Zweck gegenwärtiger Arbeit vorzüglich solche Leser und Zuhörer angehet, welche die Mathematik zu nichts anders, als zum gründlichen Denken und zu einem desto bessern Fortgang in den academischen Wissenschaften gebrauchen wollen. Nun ist es freylich nicht zu läugnen, daß auch die anwendende Mathematik zu diesem Vorhaben ungemein gute Dienste leistet. Allein ihr Umfang ist so groß, daß man bey den meisten Zuhörern befürchten müßte, die Vorbereitung würde ihnen so viele Zeit hinweg nehmen, daß sie zum Hauptzweck, um welches willen sie diese Wissenschaften lernen, zuletzt fast gar keine mehr übrig hätten. Es giebt nicht so gar viele Universalköpfe, welche mit geringer Mühe und in kurzer Zeit diese Wissenschaften gründlich fassen, und sie hernach zu einem Mittel gebrauchen, alles andere, was nur zu lernen möglich ist, sich wie ein **Leibniz** deutlich und vollständig bekannt zu machen. Hierzu kommt noch, daß diejenigen, welche die erste Gründe der sogenannten reinen Mathematik genau inne haben, mit leichter Mühe die Anwendung auf besondere Fälle machen, und wenn sie nur die Haupt-

erklärungen genau fassen, und sodann die Figuren und darauf gebaute Rechnungen, z. E. in der Mechanik oder andern praktischen Disciplinen ansehen, sich von selbsten werden helfen können. Ueberhaupt aber ist es nicht räthlich, daß junge Leute, wenn sie ihr Glück nicht blos durch die Mathematik machen wollen, sich in dergleichen Wissenschaften allzusehr ausbreiten oder gar verliehren, weil sonsten der Geschmack an deme, wozu sie eigentlich gewidmet sind, theils verdorben wird, theils etwas annimmt, wodurch ihr Vortrag in andern Wissenschaften affectirt und gezwungen werden könnte. Diß ist der Grund, warum ich meine gegenwärtige Arbeit, so kurz sie auch ist, doch in ihrer Art für vollständig uud dem Hauptzweck gemäß halte.

Wie diejenigen, welche andern Wissenschaften eigentlich gewidmet sind, die Mathematik studiren sollen?

§. 4. Die faßlichste Erklärung von der Mathematik bestehet darinnen, daß man sie eine Wissenschaft der Grössen nennet. Die Grössen lassen sich nun beedes durch Zahlen und Figuren ausdrücken. Folglich wird sich die Mathematik mit Zahlen und Figuren beschäfftigen müssen. Die Zahlen und ihre Verhältnisse gegeneinander kann man entweder mit allgemeinen oder mit besondern Zeichen vorstellen. Wenn ich z. E. eine Grösse habe, die sechs Schuhe lang und drey Schuhe breit, und übrigens rechtwinklicht ist: so kann

Die Mathematik als eine Wissenschaft der Grössen, wird erkläret, und nach ihren zwey Haupttheilen beschrieben.

ich

ich entweder sagen, sie sey 6mal 3 Schuhen im Quadrat gleich; oder wenn ich die Länge *a* und die Breite *b* nenne, sie halte *a* mal *b* Quadratschuhe in sich. Die leztere Rechnung ist allgemeiner, wie man leicht siehet. Denn der Buchstabe *a* kann sechs, sieben, acht, neun, zehen Schuhe u. s. w. bedeuten; eben das kann man von dem Buchstaben *b* sagen. Folglich ist *a* mal *b* ein Ausdruck, der für unzehlich viele andere in genannten Zahlen gesezt werden kann. Eben so läßt sich auch die Grösse durch eine wirkliche Figur ausdrücken. Ich darf nur ein Viereck mahlen, das 6 Schuh lang und 3 Schuh breit ist, so hab ich die obige Grösse gezeichnet. Da nun die Figuren durch die Grenzen der cörperlichen Ausdehnung bestimmt werden; so wird man finden, daß die Grenzen der Cörper, als Cörper, Flächen, und die Grenzen der Flächen Linien, und die Grenzen der Linien Punkten seyen. Folglich handelt die Mathematik nicht nur von Zahlen, sondern auch von Cörpern, Flächen und Linien; und zwar eben deswegen, weil sie eine Wissenschaft der Grössen ist.

Warum sie eine Wissenschaft seye?

§. 5. Eine Wissenschaft ist nicht nur eine blose Geschichte oder Erzehlung; daß man z. E. sagen könnte, diß ist ein Punkt, diß ist eine Linie, diß eine Fläche, diß eine Zahl, und diese Zahl heißt

sieben, u. s. w. sondern sie begreifft auch eine Fertigkeit in sich, dasjenige, was man sagt, zu erweisen, und die Gründe anzuführen, warum dieses oder jenes gesagt werde; oder überhaupt einen Satz oder eine Wahrheit aus unwidersprechlichen Gründen herzuleiten. Dinge, welche jedermann weiß und glaubt, erst weitläufftig erweisen wollen, wäre sehr kindisch. Folglich muß derjenige, der die Kunst zu beweisen verstehen will, entweder nur diejenige Wahrheiten, die ganz unbekannt sind, oder wenigstens solche, daran man zweifelt, oder die man nicht so leicht einsiehet, unumstößlich darzuthun suchen. Da nun die Mathematik eine Wissenschaft ist, so muß sie theils unbekannte, theils nicht genug erwiesene Eigenschaften der Grössen erfinden und in ein gehöriges Licht setzen. Weil man aber unbekannte Wahrheiten nicht unmittelbar, sondern erst alsdann richtig finden kann, wenn man bekannte Wahrheiten, die mit den gesuchten etwas gemein haben, oder in einer nähern Verbindung mit ihnen stehen, voraus setzt und zu Grunde legt; so heißt erfinden nichts anders, als durch Hülfe bekannter Wahrheiten unbekannte entdecken, deren Verhältniß zu den bekannten uns gegeben wird. Z. E. ich solle zwey Zahlen finden, die zusammen fünfe ausmachen, und zugleich so beschaffen sind, daß,

V. Was Erfinden heisse, und wie die Mathematik die Erfindungskunst befördere?

daß, wenn die eine von der andern abgezogen wird, der Rest eines seye. Diese Aufgabe ist leicht: denn die Zahlen sind drey und zwey; ihre Summe ist fünf, und zwey von drey abgezogen, läßt eins übrig. Hingegen wenn man verlangt, ich solle ein Quadrat finden, das gerade noch einmal so groß sey als ein anderes gegebenes Quadrat; so ist die Aufgabe schon schwerer. Das ist die bekannte pythagorische Erfindung. Noch schwerer ist das den alten Meßkünstlern am allerschwersten gefallene delphische Problem, kraft dessen ein Cubus, das ist, ein viereckigter Cörper, der gleich lang, breit und hoch ist, verdoppelt oder in einen andern verwandelt werden sollte, welcher gerade noch einmal so groß und abermal gleich lang, breit und hoch wäre. Hieraus erhellet nun, daß die Mathematik überhaupt eine Wissenschaft seye, aus bekannten Grössen andere unbekannte zu erfinden, welche zu den bekannten eine gegebene Verhältniß haben.

Warum die Arithmetik der Geometrie vorgesezt werde.

§. 6. Die Mathematik, in so fern sie sich mit blosen Zahlen beschäfftiget, wird Arithmetik genannt; in so fern sie aber mit Figuren umgeht, heißt sie die Geometrie. Da man aber auch in der Geometrie die zerschiedene Grössen ohne Zahlen nicht vergleichen, oder neue Eigenschaften daraus herleiten kann, folglich die

Zahlen fast unumgänglich nöthig hat; so siehet man leicht, woher es komme, daß man die Arithmetik zuerst vortragen und lehren müsse. Dann obschon die Alten die Mathematik sogleich mit der Geometrie ohne eine eigentliche Arithmetik anfiengen; so geschah es aus Mangel theils der arabischen Zahlzeichen, die wir jezo haben, theils der sogenannten Algebra oder Buchstabenrechnung, welche sie entweder gar nicht hatten, oder als ein Geheimniß sorgfältig verbargen. Dahero war es in der Euclideischen Schule und vor Alters ungleich schwerer, die Mathematik zu lernen, als es jezo ist. Man darf nur einen Versuch wagen, und mit dem griechischen Alphabet, nach der Bedeutung, welche die Buchstaben als Zahlzeichen haben, eine Rechnung anstellen; so wird man die Schwürigkeiten von selbst finden. Diß ist die Ursache, warum die griechische Meßkünstler das Zählen so viel möglich vermieden, und durch den Weg der Reduction z. E. viel leichter gesagt haben: alle Winkel, die aus einem Punkt auf einer geraden Linie gezogen werden, oder auch alle drey Winkel in einem Dreyeck, seyen zween rechten Winkeln gleich; als daß sie gesagt hätten, sie machen 180 Grade. Da aber in unsern Zeiten aus schon angeführten und noch andern Gründen die Mathematik ungemein empor ge-

und warum die Alten sogleich die Geometrie, ohne vorher die Arithmetik hinlänglich zu erläutern, vorgetragen haben.

Vorzug der neuern vor den alten.

kom-

kommen ist; so achten wir uns verbunden, diese Wissenschaft so leicht und faßlich vorzutragen, als nur immer möglich ist. Darum werden wir die Arithmetik, und zwar sowohl nach den ordentlichen Zahlzeichen als auch nach der Buchstabenrechnung, zuerst abhandeln.

Warum man bey den ersten Anfangsgründen etwas weitläufftiger seyn müsse.

§. 7. Eine jede Grösse bestehet aus Theilen, und diese Theile kann man als ihre Einheiten und Elemente ansehen. Je leichter und völliger sich nun eine Grösse in ihre Elemente eintheilen läßt, je einfacher und natürlicher die Elemente selbst sind, und je genauer und zuverlässiger man sie erkennet; desto sicherer ist der Schluß, den man davon aufs Ganze macht. Da man nun von den Elementen der mathematischen Cörper eine so zuverlässige Erkenntniß bekommt; so ist es kein Wunder, daß man es in der Mathematik bisher weiter als in allen andern Wissenschaften gebracht hat. So können z. E. die Dreyecke, als die einfacheste und nach allen ihren Eigenschaften genugsam bekannte Figuren, für die Elementen aller geradelinigten obgleich noch so irregulairen Figuren angesehen werden: dahero lassen sich alle geradelinigte Figuren aufs genaueste ausmessen. Was zum Maas der krummlinigten Figuren, besonders in Absicht auf ihre Elemente, dienlich seye, werden wir bey der Differential- und Integral-

tegralrechnung zeigen. So viel siehet man also schon, daß man es für keine unnöthige Weitläufftigkeit halten dürfe, wenn man sich bey den einfachsten und simpelsten Figuren etwas länger aufhalten wird.

Von der allgemeinen mathematischen Sprache, oder vorläuffige Erklärung der nöthigsten und am oftesten vorkommenden Zeichen und Charakteren.

§. 8. Aus gleichem Grunde wird es den Leser nicht befremden, wenn ich jezo auch die mathematische Sprache etwas umständlicher erkläre. Es muß doch ein Liebhaber dieser Wissenschaft vor allen Dingen eben so gut recht lesen und schreiben lernen, als derjenige, der eine fremde Sprache zu lernen anfängt. Die mathematische Sprache hat zwar ihre eigene Zeichen: was aber ihre Grundsätze, oder, wenn ich so reden darf, ihre grammatische Hauptregeln betrifft; so sind sie allgemein, und dem Menschen so natürlich und angebohren, daß es ihm anfänglich seltsam vorkommt, wenn man ihm sagt, er solle sich diese Hauptwahrheiten besonders bekannt machen, und in seinem Calculiren fleissig daran gedenken. Inzwischen wird man doch bald finden, wie nöthig es ist, daß man sie einem nicht nur sagt, sondern auch ausführlich erkläret. Da ich nun jezo von der mathematischen Sprache rede; so werde ich zuerst die Zeichen, die man wissen muß, erklären. Sie sind folgende:

Zeichen	Bedeutung
$=$	ist das Zeichen der Gleichheit;
$\backsim$	der Aehnlichkeit.
$>$	dessen was kleiner ist, da die Spitze gegen dem kleinern gekehrt ist.
$<$	dessen was grösser ist, da die Oeffnung gegen dem grössern gekehrt wird.
0	dessen was keine Grösse hat.
∞	dessen was in seiner Art unendlich groß ist.
$+$	der Addition; und wird ausgesprochen plus.
$-$	der Subtraction und der arithmetischen Verhältniß; wird ausgesprochen minus.
x wie auch, oder bey den Buchstaben nur die blose Zusamensetzung, $ab = a.b$	der Multiplication.
: wie auch ein Strich zwischen zwey unter einander gesetzten Zahlen, $\frac{2}{3}$	der Division; und der geometrischen Verhältniß.
$\sqrt{}$	der Wurzeln.

Unter diesen Zeichen kommt das erste, nemlich das Zeichen der Gleichheit, am alleröftesten vor. Wir wollen aber von allen Exempel geben, weil wir doch solche Leser voraussetzen, welche die vier sogenannte Species der Arithmetik ein wenig verstehen. Z. E. wenn es heißt: $6 + 2 = 8$, so spricht man diese Schrift also aus: sech-

se plus zwey ist gleich achte. $4-1=3$ heißt: vier minus eins ist gleich drey. $6.3=18$ oder $6 \times 3=18$. heißt: sechse multiplicirt mit drey ist gleich achtzehen. $ab=yx$ heißt a multiplicirt mit b ist gleich y multiplicirt mit x. Doch gehet eine solche blose Zusammensetzung bey den gewöhnlichen Zahlzeichen nicht wie bey den Buchstaben an. Die Ursache ist leicht begreifflich. Man würde sich gar leicht verwirren. Dann 6. 3 oder sechse multiplicirt mit drey, kann ich nicht blos zusammen setzen, und sagen 63; weil es im Numeriren drey und sechzig heißt. $6:2=3$ oder $\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$ wird ausgesprochen: sechse dividirt durch zwey ist gleich drey $\frac{1}{\infty}=0$. eins dividirt ins unendliche, wird nichts, oder unendlich klein. $4>3$ vier ist grösser als drey. $2<5$ zwey ist kleiner als fünf. $\sqrt{16}=4$. die Quadratwurzel von sechszehen ist gleich vier. Wir werden an seinem Ort zeigen, daß, wenn auf dem Wurzelzeichen nichts stehe, es allemal die Quadratwurzel anzeige; in andern Fällen muß eine Zahl darüber stehen, z. E. $\sqrt[3]{8}=2$ die Cubicwurzel aus acht ist gleich zwey. Diß ist etwas schwerer, und gehört dahero nicht in die Einleitung; wie auch die Gleichung $3-1=4-2$ drey minus eins ist gleich vier minus zwey; wodurch eine

ne arithmetische Proportion, wie durch die folgende 6 : 3 = 8 : 4 sechse zu drey wie achte zu vier, oder sechs dividirt durch drey ist gleich acht dividirt durch vier, eine geometrische Proportion ausgedrückt wird. Eben so werden wir auch an seinem Ort zeigen, wie man in der Geometrie die Linien, und Winkel u. s. w. lesen und aussprechen müsse.

Allgemeine Grund- und Hauptregeln, nach welchen sich die Mathematik vorzüglich richtet, und welche fast auf allen Blättern gedacht werden müssen.

§. 9. Die Grundregeln, nach welchen sich diejenigen, die in der Mathematik was thun wollen, beständig richten müssen, werden nicht weniger faßlich seyn. Sie sind folgende:

I. Eine jede Grösse ist sich selber gleich; und eine jede Grösse ist ihren wirklichen Theilen zusammen genommen gleich. Z. E.

$8 = 5 + 3$. $6 = 4 + 2$ u. s. w.

II. Wann zwo Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich. Z. E.

$$6 = 4 + 2$$
$$6 = 5 + 1$$
folglich $5 + 1 = 4 + 2$.

III. Wenn man gleiches zu gleichem addirt, so kommt gleiches heraus; z. E.

$$8 = 6 - 2$$
$$4 = 4$$
$$8 + 4 = 6 + 2 + 4.$$

IV. Wenn man gleiches von gleichem subtra-

trahirt, so bleibt gleiches übrig. Z. E.

$$\begin{array}{c} 9=7+2 \\ 6=6 \\ \hline 9-6=7+2-6. \end{array}$$

V. Wenn man gleiches mit gleichem multiplicirt, so kommt gleiches heraus. Z. E.

$$\begin{array}{c} 4=3+1 \\ 2=\ \ 2. \\ \hline 4.2=(3+1).2 \end{array}$$

VI. Wenn man gleiches mit gleichem dividirt, so kommt gleiches heraus; z. Ex.

$$\begin{array}{c} 8=6+2 \\ 4=4 \\ \hline 8:4=(6+2):4. \end{array}$$

VII. Was grösser oder kleiner ist als die eine von zwo gleichen Grössen, das ist auch grösser oder kleiner als die andere. Z. E.

$$\begin{array}{c} 6=5+1 \\ 2<6 \\ \hline 2<5+1. \end{array}$$

Diß sind beynahe die vornehmste Grundsätze, welche viel hundertmal bey dem Calculiren vorkommen, und worauf die wichtigste Entdeckungen beruhen. Z. E. bey dem §. 5 angeführten Problem, nach welchem man zwey Zahlen finden soll, deren Summe 5, und deren Differenz 1 ist,

wer-

werden sogleich fünf von unsern Grundsätzen angewandt. Unerachtet die Aufgabe im Kopf leichter ausgerechnet ist, so wollen wir doch die Anwendung der obigen Regeln dabey zeigen, damit die Leser einen vorläuffigen Begriff davon bekommen. Die zwo gesuchten Zahlen sollen x und y seyn; so wird nach Maßgab des Problems seyn

$$x + y = 5 \text{ und}$$
$$x - y = 1 \text{ folglich}$$
$$2x = 6 \text{ Can. III.}$$
$$: 2 \text{ Can. VI.}$$
$$x = 3$$

und wiederum

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$
$$2y = 4 \text{ Can. IV.}$$
$$: 2 \text{ Can. VI.}$$
$$y = 2$$

Die zwo gesuchte Zahlen sind also 3 und 2. So leicht nun dieses Exempel an und vor sich selbst ist; so wird man doch begreiffen, daß es unzehlich viel andere giebt, die man gewiß im Kopf nicht ausrechnen kann, und bey denen dahero der Nutzen von den anzuwendenden Grundsätzen ungleich grösser ist.

§. 10. Endlich hat man noch auf drey Hauptsätze zu merken, welche in den ma-

Erklärung der drey

Hauptsätze von der Aehnlichkeit, Gleichheit und Congruenz.

thematischen Wissenschaften mehr als sonsten vorkommen, wiewohl sie eigentlich zur Ontologie gehören. Ich meyne den Satz der vollkommenen Uebereinstimmung, den Satz der Gleichheit, und den Satz der Aehnlichkeit. Zwo Sachen sind einander ähnlich, wenn man sie durch nichts als durch die Grösse unterscheiden kann; oder wenn in beeden alles einerley ist, ausgenommen die Grösse. So kann der Sohn dem Vater vollkommen ähnlich seyn, ungeachtet jener noch ein Kind und dieser ein Mann ist, folglich beede an der Grösse weit unterschieden sind. Ein Gemälde im Kleinen, wenn es kaum einen Zoll hoch ist, kann einer sechsschuhigten Person ähnlich seyn, unerachtet die Grösse beederseits noch einen beträchtlichen Unterschied machet. Alle Cirkel sind deswegen einander ähnlich, oder ein kleiner Cirkel siehet einem grössern vollkommen ähnlich, wie ein kleines o einem grossen ähnlich ist. Z. E. o ∽ O. Denn wenn ich das kleinere o durch ein Vergrösserungsglas ansehe, so wird es dem grössern vollkommen gleich werden. Nunmehro wird man leicht begreiffen, daß alle diejenige Sachen einander ähnlich seyen, welche durch nichts als blos durch die Grösse von einander unterschieden werden. Das ist der Satz des Aehnlichen. Nach dem Satz der Gleichheit

werden

werden solche Dinge mit einander vergli-
chen, die blos in der Grösse mit einander
übereinkommen, sonst aber von einander
unterschieden seyn können, wie sie immer
wollen. Wann ich einen Bogen Papier
in allerhand Figuren zerschneide, z. E. in
Dreyecke, in Vierecke, in Fünfecke, u.
s. w. und hernach sie auf eine andere Art
zusammen setze: so ist, wenn nichts davon
verlohren geht, die Summe aller dieser
Theile, oder die daraus zusammengesetzte
neue Figur, dem vorigen Bogen Papier
vollkommen gleich, und nimmt wieder
eben so viel Platz ein, als vorhin, uner-
achtet eine grosse Unähnlichkeit heraus
kommt. So giebt es auch Dinge, die
dem Werth nach einander gleich sind, ob
sie schon in allen andern Stücken höchst
unähnlich sind. Z. E. eine Ducat ist jezo
dem Werth nach fünf Gulden Silbergeld
gleich, unerachtet sonst zwischen einer Du-
cat und fünf Gulden Münz nichts ähnli-
ches gefunden wird. Hieraus nun erhel-
let zur Genüge, was eigentlich der Satz
der Gleichheit seye; ein Satz, der in der
Mathematik einen allgemeinen Nutzen
hat. Endlich ist noch der Satz der völligen
Uebereinstimmung oder **Congruenz**
zu erklären übrig. Sachen oder Figuren,
welche gleich und ähnlich sind, congrui-
ren. Z. E. Zwo Ducaten von einem
Schlag, zwey rechtwinklichte Vierecke

 von

von gleicher Länge und Höhe, sind in der Mathematik congruent oder vollkommen übereinstimmend, das ist, beedes gleich und ähnlich. Diß sind nun die vornehmste Grundsätze, die man sich bekannt machen muß, wenn man in dieser Wissenschaft sich mit Nutzen umsehen will. Die daraus gezogne Folgen sind nicht weniger fruchtbar. Wenn zum Exempel von gleichen Sachen die Rede ist, so darf man allemal gleiches für gleiches setzen oder substituiren; Ist die Rede von ähnlichen Dingen, so kann man abermal ähnliches für ähnliches setzen, u. s. w. je nachdeme eine leichtere Rechnung oder sonst ein Vortheil im Calculiren daraus zu ersehen ist. Denn wie man für eine Ducat ihren Gehalt an Silbermünzen setzen darf, so darf man mit gleichem Recht, z. E. für ein irregulaires Viereck ein regulaires, das aber gleich groß ist oder gleich viel Platz einnimmt, setzen; u. s. w. Diese Substitutionen nun haben einen unbeschreiblichen Nutzen, und helfen oft die schwerste Aufgaben ungemein erleichtern, wie wir zu seiner Zeit aus der Erfahrung es lernen werden.

Gleichwichtige Folgen aus diesen Sätzen.

§. 11. Wir haben das nöthigste, und dasjenige, was wir in der Einleitung sagen wollten, ausführlich gesagt. Nun bleibt nichts übrig, als daß wir zum Werk selbst

selbst schreiten. Fleiß, Nachdenken und Aufmerksamkeit sind diejenige Eigenschaften, die ein Liebhaber der Mathematik zu dieser Arbeit mitbringen muß. Hat ihm die göttliche Vorsehung noch über das eine vorzügliche Fähigkeit und besonders einen scharfsinnigen Witz verliehen; so wird er dieser Wissenschaft vor andern Ehre machen. Dann je grösser der Witz oder die angebohrne Fähigkeit ist, zerschiedene Verhältnisse, Aehnlichkeiten, und Gleichheiten einzusehen und zu entdekken; desto weiter wird man es in der Mathematik bringen können. Ja der Fleiß selbst, den man darauf wendet, wird nach und nach die auch nicht so gar fähige Köpfe ermuntern, und die Scharfsinnigkeit des Witzes gleichsam beleben und erwecken. Da nun diese Gabe des Verstandes bey allen nur möglichen Wissenschaften höchst vortheilhaft ist; so siehet man aufs neue, wie und warum die Mathematik eine Vorbereitung zu allen höhern Disciplinen heissen könne. Ich habe dahero geglaubt, meinen Lesern und Zuhörern nicht mißfällig zu werden, wenn ich nach diesem Hauptzweck die erste Gründe der Mathematik abhandle, und bey allen Gelegenheiten zeige, wie die Kräften der Seele dadurch geschärft werden. Dann unerachtet diese Arbeit nicht

Was ein Liebhaber der Mathematik für Eigenschaften haben müsse;

und wie diese Wissenschaft auch mittelmäßige Köpfe bessern könne.

neu ist, so ist sie doch auch nicht so ge-
mein, daß man sich über die Menge der
Bücher, welche die Mathematik nach
unseren Absichten vortragen, einiger-
massen beschweren
könnte.



Innhalt der Arithmetik.

§. 12.

Die Arithmetik oder Rechenkunst ist eine Wissenschaft, aus bekannten Zahlen andere unbekannte zu finden, deren Verhältniß zu den bekannten gegeben wird. Da sie sich nun mit den Zahlen beschäfftiget, es mögen hernach die gewohnliche Zahlzeichen, oder in der Buchstabenrechnung die Buchstaben seyn; so wird sie

Erklärung der Arithmetik.

I. Die Zahlzeichen recht aussprechen lehren;

II. Zeigen, was man für Veränderungen mit ihnen vornehmen könne, nemlich die Vermehrung und die Verminderung: da dann
   1) die Vermehrung
      a) durch die Addition,
      b) durch die Multiplication;
   2) die Verminderung
      a) durch die Subtraction,
      b) durch die Division geschiehet.

III. Von den zerschiedenen Verhältnissen der Zahlen handeln, und zwar
   1) von den Verhältnissen zweyer Zahlen, in so fern eine theils grösser ist als die andere, theils in

so fern eine in der andern etlichmal enthalten ist; folglich von den sogenannten Brüchen, und den auf sie angewandten vier Rechnungsarten.

2) Von den Verhältnissen mehrerer Zahlen gegeneinander, das ist

a) von den Proportionen, welche in der Gleichheit zweyer Verhältnisse bestehen,

b) von der daraus fliessenden Regel detri und andern Regeln ꝛc.

c) von den zerschiedenen Progressionen.

3) Von der Verhältniß der Wurzeln gegen ihre Dignitäten oder Potenzen, und zwar

a) von den Quadratwurzeln und Zahlen,

b) von den Cubicwurzeln und Zahlen,

c) von höhern Dignitäten oder Potenzen,

d) von Irrationalgrössen; wie auch von unreinen quadratischen Gleichungen ꝛc.

e) von der Anwendung dieser Regeln auf bestimmte und unbestimmte Aufgaben.

I. Cap.

I. Cap.

Von dem Numeriren oder Aussprechen der Zahlen.

§. 13.

Warum man von der arithmetischen Sprache besonders handle.

Weil die Arithmetik aus bekannten Zahlen andere unbekannte erfinden lehrt; so ist vor allen Dingen nöthig, daß man wisse, wie man die Zahlen recht lesen und aussprechen solle. Wir haben zwar die Hauptregeln von der mathematischen Sprache in der Einleitung schon vorgetragen; allein es hat ein jeder Theil der Mathematik seine eigene Ausdrücke und Charactere: dahero allerdings erfordert wird, daß man auch diese insbesondere zu verstehen sich Mühe gebe. Was nun das Aussprechen der Zahlen betrifft, so halten wir uns dißfalls an die uns übliche und gewöhnliche wiewohlen willkührliche Zahlzeichen. Sie theilen sich in einfache und zusammengesetzte; die einfache gehen von eins bis neune, die zusammengesetzte fangen mit der zehenten Zahl an, und können hernach durch zerschiedene Verbindungen der einfachen Zeichen theils untereinander selbst, theils mit den Nullen, wie wir sogleich zeigen wollen, in das Unendliche fortgezählet werden.

Warum die Zahlzeichen willkührlich seyen.

§. 14. Wie die Zeichen selbst willkührlich sind, so ist auch die Zahl der einfachen Zeichen willkührlich gewesen. Dann wie man von eins bis zehen zehlt, so könnte man eben so wohl von eins bis sechse, viere, drey, oder gar nur bis zwey zehlen, und alsdann sogleich zusammengesetzte Zeichen gebrauchen. Diese letztere Art, wenn man nur bis zwey mit einfachen Zeichen zehlet, bekam von dem Herrn v. Leibniz den Namen der Dyadik. Man braucht darzu nicht weiter als ein einiges Zahlzeichen und eine Nulle. Das Zahlzeichen, welches die Einheit in eigentlichem Verstande ausdrückt, ist das gewöhnliche Zeichen von eins nemlich 1. Wenn man also zwey schreiben will, so muß man diejenige Verbindung von 1 und 0 gebrauchen, welche in den ordentlichen Zahlen zehen bedeutet. Z. E. wenn man einen Versuch wagen will, so wird man, weil alles auch hier auf die Stellen, wo die Zeichen stehen, anzukommen pflegt, folgende Tabell leicht verstehen:

Von der Leibnizischen Dyadik.

Dyadik.	gewöhnliche Zahlen.
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5

110

110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16 u. s. w.

Ihre Vortheile und ihre Schwürigkeiten.

Da man nun gleich aus diesem Exempel begreifft, daß eine grosse Zahl einen ungleich grössern Raum nach der Dyadik einnehmen würde, als sie nach den gewöhnlichen Zahlzeichen einnimmt, und hernach bey starken Rechnungen durch die Menge der abwechselnden Einser und Nullen eine Verwirrung entstehen könnte: so behält man lieber die gewöhnliche Rechnung bey; obschon in andern Stükken die Dyadik mehr Vortheile hat, und man z. E. bey derselben das vielen so beschwerlich fallende Einmaleins zu lernen gar nicht genöthiget ist. Allein diese Beschwerlichkeiten lassen sich auch auf andere Wege vermeiden, wie wir an seinem Ort zeigen werden. So viel merken wir inzwischen noch an, daß Herr v. Leibniz seine Dyadik zu einiger Erläuterung der Schöpfung aus nichts mit vielem Witz ange-

Wie man durch die

ge-

Dyadik die Schöpfung aus Nichts erläutert habe.

gewendet, und seine Gedanken auf einer Münze, worauf etliche Rechnungsproben nach der Dyadik geprägt waren, mit folgender Inschrift erläutert hat:

Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum,

oder

Alles aus nichts zu schaffen, ist schon die Einheit genugsam.

Denn wenn ich nur Eins und Nulle habe, so kann ich nach der Dyadik alle nur mögliche Zahlen schreiben, sie mögen hernach noch so groß seyn, als sie immer wollen.

Warum man mit den einfachen Zahlzeichen nur bis auf zehen zehle,

§. 15. Wir bleiben aber jezo bey den gewöhnlichen Zahlzeichen stehen. Man zehlet von undenklichen Zeiten her von eins bis zehen; vermuthlich weil die Menschen anfänglich an ihren zehen Fingern das, was sie zehlen wollten, hergezehlt haben. Die einfache Zahlzeichen gehen von eins bis neune, und sind folgende: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Sie werden einfache Zeichen genennet, weil sie als solche für sich allein, und weder unter sich noch mit andern verknüpft stehen; man heisset sie auch Einheiten, nicht zwar in Ansehung ihrer selbst, dann im eigentlichen Verstand ist nur der Einser eine Einheit, sondern in Ansehung der folgenden Zehner, Hunderter u. s. w. Was also kleiner ist als ein

und wie ferne diese einfache Zahlzeichen Einheiten genennet werden.

Zeh-

Zehener, das wird unter dem Namen der Einheiten begriffen.

§. 16. Nun fragt sichs aber, wie man es denn mache, wenn man zehen schreiben wolle? Wir haben kein einfaches Zeichen mehr, diese Zahl auszudrücken. Folglich muß man hier auf eine Verbindung der Zeichen denken. Nun giebt es eine doppelte Verbindung: dann entweder kann ich sagen: Zehen ist 6 + 4; oder ich kann ohne ein solches Verbindungszeichen den Werth der einfachen Zahlen aus den Stellen und Plätzen, die sie einnehmen, bestimmen; und dazu sind die Nullen dienlich, welche an und für sich nichts bedeuten, in der Verbindung aber mit den einfachen Zahlen, den ihnen vorgesetzten Einheiten, durch den Rang, den sie ihnen lassen, einen wirklich höhern Werth beylegen. Folglich wenn man dem Einser eine Nulle nachsetzt, so wird er schon einen höhern Werth bekommen. Dieser Werth nun des Einsers, der die zweyte Stelle zur Linken einnimmt, ist zehenmal so groß, als er in der ersten Stelle zur Rechten war. Warum er gerade zehenmal, und in der dritten Stelle zehenmal zehenmal, oder hundertmal grösser seye, werden wir an seinem Ort, wenn wir von den Regeln der Combinationen handeln, ausführlich erweisen. Bis dahin kann man also die Sache nur historisch behal-

Wie man es mache, wenn man eine Zahl, die grösser als Neune, Zehen u. s. w. ist, schreiben solle.

Nutzen der sogenannten Nullen.

behalten. Der Ausdruck 10 wird demnach zehen bedeuten. Eben so wird der Zweyer in der zweyten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er in der ersten Stelle war, darum bedeutet der Ausdruck 20 so viel als zwanzig; der Neuner wird in der zweyten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er vorhin war; folglich wird 90 so viel als neunzig, 91 so viel als ein und neunzig, und 99 so viel als neun und neunzig, heissen. Hieraus ist klar, daß diese zweyfache Verbindung bis auf hundert fortgehe; wenn man aber hundert schreiben will, so muß der Einser abermal um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt werden, und dann bedeutet er wiederum zehenmal so viel als in der zweyten, und hundertmal so viel als in der ersten Stelle. Dieses nun zu bewerkstelligen, brauchet man, wie man leicht einsiehet, drey Zahlzeichen, weil der Einser die dritte Stelle zur Linken einnehmen muß: folglich wird der Ausdruck 100 hundert anzeigen; wie z. E. der folgende Ausdruck 192 hundert neunzig zwey, oder hundert und zwey und neunzig bedeutet. Diese dreyfache Verbindung gehet nun bis auf tausend fort; was aber über tausend hinaus ist, dazu braucht man aus obigem Grunde schon vier Zahlzeichen oder eine vierfache Verbindung; was über zehentausend hinausgeht, erfor-

fordert eine fünffache, was über hundert-tausend eine sechsfache, was über tausendmal tausend ist, eine siebenfache Verbindung u. s. w. Die Ursache davon ist leicht begreiflich. Dann weil allemal diejenige Zahl, die zehenmal so groß ist als die unmittelbar vorhergehende, eine Stelle weiter zur Linken erfordert, folglich die Stellen selbst in die Decimalprogression fortgehen, so müssen bey zehen zwey, bey hundert oder zehenmal zehn drey, bey tausend oder zehenmal hundert vier Zahlzeichen mit einander verbunden werden.

Warum bey den Zehnern zwey, bey den Hundertern drey, bey den Tausendern vier Zahlzeichen u. s. w. nöthig seyen.

§. 17. Die Erfindung dieser Rechnung wird insgemein den Arabern zugeschrieben. Sie mag aber herkommen, wo sie will, so zeuget sie von einem fruchtbaren Witz. Das Witzige besteht darinnen, daß die Erfinder auf den Einfall gerathen, den Werth der Zahlzeichen nach dem Rang oder Platz zu bestimmen, den sie neben den übrigen einnehmen und bekleiden. Wie aber nicht alles Witzige zugleich so gemeinnützig und brauchbar ist, so müssen wir auch zeigen, wie fruchtbar diese Erfindung seye. Die Bestimmung des Werths in den Stellen nach der zehnfachen oder Decimalprogression giebt der Rechnung eine gewisse Einförmigkeit, und verhütet alle sonst zu befürchtende Verwirrungen. Hernach ist diese Art zu rech-

Nuzen und Artigkeit dieser Erfindung.

behalten. Der Ausdruck 10 wird demnach zehen bedeuten. Eben so wird der Zweyer in der zweyten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er in der ersten Stelle war, darum bedeutet der Ausdruck 20 so viel als zwanzig; der Neuner wird in der zweyten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er vorhin war; folglich wird 90 so viel als neunzig, 91 so viel als ein und neunzig, und 99 so viel als neun und neunzig, heissen. Hieraus ist klar, daß diese zweyfache Verbindung bis auf hundert fortgehe; wenn man aber hundert schreiben will, so muß der Einser abermal um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt werden, und dann bedeutet er wiederum zehenmal so viel als in der zweyten, und hundertmal so viel als in der ersten Stelle. Dieses nun zu bewerkstelligen, brauchet man, wie man leicht einsiehet, drey Zahlzeichen, weil der Einser die dritte Stelle zur Linken einnehmen muß: folglich wird der Ausdruck 100 hundert anzeigen; wie z. E. der folgende Ausdruck 192 hundert neunzig zwey, oder hundert und zwey und neunzig bedeutet. Diese dreyfache Verbindung gehet nun bis auf tausend fort; was aber über tausend hinaus ist, dazu braucht man aus obigem Grunde schon vier Zahlzeichen oder eine vierfache Verbindung; was über zehentausend hinausgeht, erfor-

fordert eine fünffache, was über hundert- tausend eine sechsfache, was über tausendmal tausend ist, eine siebenfache Verbindung u. s. w. Die Ursache davon ist leicht begreiflich. Dann weil allemal diejenige Zahl, die zehenmal so groß ist als die unmittelbar vorhergehende, eine Stelle weiter zur Linken erfordert, folglich die Stellen selbst in die Decimalprogression fortgehen, so müssen bey zehen zwey, bey hundert oder zehenmal zehn drey, bey tausend oder zehenmal hundert vier Zahlzeichen mit einander verbunden werden.

Warum bey den Zehnern zwey, bey den Hundertern drey, bey den Tausendern vier Zahlzeichen u. s. w. nöthig seyen.

§. 17. Die Erfindung dieser Rechnung wird insgemein den Arabern zugeschrieben. Sie mag aber herkommen, wo sie will, so zeuget sie von einem fruchtbaren Witz. Das Witzige besteht darinnen, daß die Erfinder auf den Einfall gerathen, den Werth der Zahlzeichen nach dem Rang oder Platz zu bestimmen, den sie neben den übrigen einnehmen und bekleiden. Wie aber nicht alles Witzige zugleich so gemeinnützig und brauchbar ist, so müssen wir auch zeigen, wie fruchtbar diese Erfindung seye. Die Bestimmung des Werths in den Stellen nach der zehnfachen oder Decimalprogression giebt der Rechnung eine gewisse Einförmigkeit, und verhütet alle sonst zu befürchtende Verwirrungen. Hernach ist diese Art zu rech-

Nuzen und Artigkeit dieser Erfindung.

rechnen so beschaffen, daß man mit wenig Zeichen grosse Zahlen schreiben kann; welches man durch die mathematische Verbindungszeichen nicht bewerkstelligen könnte. Denn wenn man diesen Localwerth in Fortrückung der Zahlzeichen nicht eingeführt hätte; so würde man, nur die Zahl hundert zu schreiben, eine solche Menge Zahlzeichen durch das Zeichen + verbinden müssen, daß man sie kaum auf einmal überschauen könnte. Z. E. Zehen ist zwar 6 + 4, und bald geschrieben; aber zwanzig braucht schon mehr; z. E. 6 + 4 + 8 + 2. oder 9 + 9 + 2. u. s. w. Man könnte zwar auch einen andern Weg einschlagen, und z. E. die Multiplication dazu gebrauchen: dißfalls wäre hundert = 9. 9 + 2. 9 + 1. Jedermann aber siehet selbst, daß diese Art zu zehlen und die Zahlen zu schreiben bey weitem nicht so schicklich, bequem und artig sey als diejenige, die bereits eingeführt ist.

Ihr Vorzug vor den mathematischen Verbindungszeichen.

Warum aber nichts desto weniger die Mathematikverständige, als welche mit solchen Rechnungen sich nicht oft abgeben, und lieber die Aufgaben in allgemeinen Formeln auflösen, bey ihrer Weise zu bleiben Ursache genug haben, werden wir an seinem Ort zeigen. Uebrigens erhellet der Nutzen dieser Erfindung in genannten Zahlen zur Genüge. Es dünket mich dahero weit ungezwungener zu seyn, wenn man

Warum aber dennoch die Mathematikverständige bey ihren gewöhnlichen Zeichen bleiben.

man auch im Lateinischen, statt der römischen, unsere Zahlzeichen gebraucht. Dann die alte Römer würden gewis ihre eigene ausgemustert und die heut zu Tag übliche angenommen haben, wenn sie ihnen bekannt gewesen wären. Das einige ist bey dieser Erfindung noch anzumerken, daß, da die Zahlzeichen zur linken Hand des Lesers einen grössern Wehrt als die zur Rechten bekommen, vermuthlich die Bequemlichkeit im Schreiben diesen Rang bestimmt haben mag. Wiewohl die Zahlzeichen in Ansehung ihrer selbst untereinander so geordnet sind, daß die vornehmere oder mehr bedeutende allzeit den geringern zur Rechten stehen, wie es der Augenschein leicht geben wird.

Von der Ordnung, nach welcher die Zahlzeichen aufsteigen; und wie man anfänglich sich bey dem Lesen helfen solle.

§. 18. Die Zahlen werden also von der Rechten zur Linken so geschrieben, daß das letzte Zahlzeichen zur Rechten des Lesers die Einheiten, das nächste zur Linken, die Zehner, das dritte die Hunderter, das vierte die Tausender anzeige u. s. w. Wenn man also die Zahl 7356428 aussprechen soll; so darf man nur von hinten anfangen und sagen, es sind acht Einheiten, zween Zehner, vier Hunderter, sechs Tausender, fünf Zehentausender, drey Hunderttausender, sieben Tausendmaltausender, oder sieben Millionen. Weil aber diese Art, die Zahlen auszusprechen, etwas

Einige Mittel, geschwinder und fertiger lesen zu lernen.

was weitläuftig ist; so fangt man, um sich kürzer auszudrucken, lieber von vornen an, und sagt sieben Millionen, dreyhundert und sechs und fünfzig tausend, vierhundert und acht und zwanzig. Da nun bey grossen und langen Reihen von Zahlen die Aussprache oder das Lesen etwas schwerer fällt, und man doch die Kürze beybehalten will; so pflegt man je drey und drey Zahlen mit einem Strichlein oder andern Zeichen zu bemerken, weil man doch drey Zahlzeichen neben einander auf einmal leicht übersehen und aussprechen kann; braucht aber, um sich nicht zu verwirren, die Vorsicht dabey, daß man das dritte Zahlzeichen, von der rechten Hand an gerechnet, mit einem Strichlein von unten, das sechste mit einem Strichlein von oben, das neunte abermal mit einem Strichlein von unten, das zwölfte mit zwey Strichlein von oben, das fünfzehende wiederum mit einem Strichlein von unten, das achtzehende mit drey Strichlein von oben u. s. w. bezeichnet: da dann nach einem Strichlein von oben die Millionen, nach zwey Strichlein die Billionen, nach drey Strichlein die Trillionen u. s. w. anfangen. Nach dem untern einfachen Strichlein fangen jederzeit die Tausender entweder der Einheiten, oder der Millionen, oder der Billionen u. s. w. an. Z. E. die

Zahl

''' '' '
Zahl 9842, 346 982, 751482, 658 wird nach Maßgab der beygesetzten Strichlein ausgesprochen: Neun Trillionen, achthundert und zwey und vierzig tausend, dreyhundert und sechs und vierzig Billionen, neunhundert und zwey und achtzig tausend, siebenhundert und ein und fünfzig Millionen, vierhundert und zwey und achtzig tausend, sechshundert und acht und fünfzig.

Wie man die Nullen anzusehen habe, und warum sie oder andere dergleichen für sich nichts bedeutende Zeichen bey dieser eingeführten Rechnung nöthig seyen.

§. 19. Wir haben bey diesem Exempel mit Fleiß keine Nullen angebracht, weil wir von dem Nutzen und Gebrauch derselben vorhero was sagen müssen. Es ist aus §. 16. klar, daß die Nullen, unerachtet sie für sich selbst nichts bedeuten, in gewissen Fällen einen wahren Nutzen haben, wenn sie nemlich dem Zahlzeichen in der folgenden Stelle seinen Rang und zugleich seinen Werth geben müssen. Z. E. man kann die Zahl zwanzig nicht ohne Nulle schreiben: dann 2 allein ist zu wenig; der Zweyer muß eine Stelle weiter fortrücken; und 21 ist zuviel: folglich bleibt mir nichts übrig, als daß ich entweder eine Nulle oder ein anderes Zeichen, das weiter nichts als die Stelle und den Rang seines Nachbars andeutet, dazu gebrauche. Nun hätte man statt der sogenannten Nullen etwa Sternlein oder andere Zeichen einführen und sagen können:

2* soll zwanzig, und 2** soll zweyhundert u. s. w. ausdrücken. Man hat aber seit langen Zeiten schon die Nullen oder Zyphras, wie sie lateinisch, oder Zero, wie sie französisch heissen, zu diesem Ende eingeführt, welche folglich die leere Stellen ausfüllen, und zugleich den zur Linken folgenden Zahlzeichen ihren Werth bestimmen. Darum schreibt man zwanzig durch den Ausdruck 20, und zweyhundert durch den Ausdruck 200, u. s. w.

Wie man ein Exempel, wo viele Nullen vorkommen, fertig lesen und schreiben könne.

§. 20. Wenn man also von einem verlangte, er sollte die Zahl sechs Millionen und sechs und neunzig schreiben, so wird er am besten zurechte kommen, wenn er den Anfang zu schreiben bey den Einheiten macht, und sagt: es sind sechs Einheiten, neun Zehner, kein Hunderter, kein Tausender, kein Zehentausender, kein Hunderttausender, aber sechs Tausendmaltausender oder sechs Millionen da; folglich sieht die geschriebene Zahl also aus: 6000096. Eben so läßt sich auch eine geschriebene Zahl, wobey Nullen vorkommen, leicht aussprechen, wenn man nur die Regel §. 18 dazu nimmt, und die Strichlein gehörig anbringt. Z. E. die

    ″   ′

Zahl 20034,000056,002 heißt zwanzig Billionen, vier und dreyßig Millionen, sechs und fünfzig tausend und zwey.

§. 21. Wir haben von Millionen, Billionen und Trillionen geredet, und noch nicht hinlänglich erkläret, was sie seyen. Diese Namen erfordern also noch eine Beleuchtung. Was im deutschen tausendmaltausend ist, das nennen die Franzosen sehr füglich eine Million, und tausendmal tausend Millionen eine Billion, tausendmal tausend Billionen eine Trillion u. s. w. Folglich gehen die Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. von sechs zu sechs Zahlzeichen fort; das ist, nach dem sechsten Zahl- oder Rangzeichen, wenn es Nullen sind, fangen die Millionen an, nach dem zwölften die Billionen, nach dem achtzehenden die Trillionen, nach dem vier und zwanzigsten die Quadrillionen u. s. w. Die Deutschen haben diese Namen von den Franzosen um so eher angenommen, weil sie nicht nur keine eigene haben, sondern auch durch die öftere Zusammensetzung der tausendmal tausendmal tausend u. s. w. unvermeidliche Verwirrungen entstehen könnten. Nunmehro haben wir alles, was von der Aussprache der Zahlen zu wissen nöthig ist, umständlich beschrieben. Eines könnte noch hinzu gesagt werden. Es giebt Leute, welche, um einen auf die Probe zu setzen, je und je gewisse Zahlen anders aussprechen, als sie ordentlicher Weise geschrieben werden, und hernach verlangen, man

Was man unter den Worten Millionen und Trillionen verstehe?

Nutzen dieser Wörter.

solle sie an einem fort niederschreiben. Hieher gehöret die Aufgabe, man solle Eilftausend Eilfhundert und Eilf schreiben. Diese Zahl läßt sich nicht ohne die Addition in einem fort schriftlich ausdrukken. Man schreibt also zuerst 11000
hernach 1111
und addirt beede Zahlen 12111, da dann Zwölftausend Einhundert und Eilf herauskommt, welche Zahl der obigen vollkommen gleich ist. Solche Exempel nun lassen sich durch das angeführte Mittel bald auflösen; wiewohlen sie in keiner andern Absicht angebracht werden, als etwa einen zu überraschen und schnell zu prüfen. Allein es sind neben dem sehr grosse Kleinigkeiten; und wenn einer auch nicht sogleich darauf antworten könnte, so darf er sich eben nicht schämen, woferne er nur das wesentliche und gründliche recht weiß, und wie die Mathematik überhaupt also auch die Arithmetik nach derjenigen Absicht gebrauchet, nach welcher sie gegenwärtig vorgetragen wird.

II. Cap.

Zweytes Capitel.

Von der Vermehrung und Verminderung der Zahlen, oder von den vier Rechnungsarten, welche sonsten die vier Species genannt werden.

§. 22.

Eine Zahl kann man, wie die Grössen überhaupt, als eine Menge von Theilen ansehen, welche entweder eigentlich sogenannte Einheiten §. 15. oder Theile der Einheit sind. Z. E. die Zahl zehen Gulden bestehet aus Einheiten, deren jede ein Gulden genennt wird; die Zahl $\frac{3}{4}$ Gulden, bestehet aus Theilen einer Einheit, die man einen Gulden nennet. Folglich hat in der Arithmetik die Einheit selbst noch eine Grösse, und ist eigentlich nur eine Verhältniß, oder wie man zu reden pflegt, keine absolute, sondern blos eine respective Einheit. Nun können alle endliche Grössen vermehrt oder vermindert werden. Wir müssen also von den Zahlen ein gleiches behaupten. Eine Grösse aber wird vermehrt, wenn man entweder andere von gleicher Art, sie mögen hernach grösser oder kleiner seyn, ihr zugiebt; oder wenn man eben dieselbige Grösse etlichmal zu sich

Wie man die Zahlen anzusehen habe.

Ihre Vermehrung und Verminderung;

warum eine jede Zahl auf eine doppelte Weise, nemlich durch die

Addition und Multiplication, vermehret werden könne.

sich selbst setzet. Jenes heißt addiren, dieses multipliciren. Z. E. wenn ich zu 4 Gulden 2 Gulden, und wieder 6 Gulden hinzusetze, so addire ich, und bekomme eine Grösse von 10 Gulden; wenn ich aber 4 fl. etlichmal z. E. dreymal zu sich selbst addire, so multiplicire ich und bekomme eine Grösse von 12 Gulden. Ich muß aber in beeden Fällen Grössen von einerley Art haben. Was nun Arten und Gattungen seyen, lernet man in der Logik. Gulden und Ducaten sind von verschiedener Art: wenn ich also 4 Speciesgulden und 3 Species Ducaten habe, so kann ich sie nicht zusammen zehlen; dann ihre Summe macht weder blos sieben Gulden, noch auch sieben Ducaten aus. Allein ich darf nur nach den Regeln der Vernunftlehre einen andern Namen, durch die Bestimmung einer höhern Gattung, welche beeden gemein ist, z. E. den Namen Geld, erfinden, so werde ich alles addiren und sagen können: es sind sieben Stücke Gelds. Auf diese Weise bringt man verschiedene Namen unter einerley Benennung; und diß ist die allgemeine Regel, welche in der Arithmetik, vornemlich bey den Brüchen, nur auf besondere Fälle applicirt wird. Man siehet hieraus, wie die Wissenschaften miteinander zusammenhangen, und wie die Arithmetik nichts an-

Was Grössen von einerley Art seyen.

Wie man sie nach den Grundsätzen der Logik unter einerley Art oder Benennung bringen könne.

ders

ders als die Anwendung der Logik seye. Wir werden bey allen Gelegenheiten diese Verwandtschaft zeigen, und die Regeln vernünftig zu denken auch aus dieser Wissenschaft theils zu vermehren, theils zu erläutern suchen.

Von der Addition der Zahlen.

§. 23. Die Zahlen werden erstlich durch die Addition vermehret. §. 22. Wir müssen also umständlich erklären, was die Addition seye. Addiren heißt eine Zahl erfinden, welche verschiedenen andern zusammengenommen gleich ist. Z. E. drey und vier giebt sieben; die Zahl Sieben ist die erfundene Zahl, welche beeden gegebenen Zahlen drey und vier zusammen genommen gleich ist. So leicht nun dieses Exempel ist, so giebt es doch ungleich schwerere, wenn nemlich nicht nur viele, sondern auch grosse Zahlen addirt werden sollen. Z. E. 234062 und 5348, und 90023, kann man nicht so schnell im Kopf addiren, als die obige zwo einfache Zahlen. Folglich muß man hier sich einiger Vortheile bedienen, welche das Rechnen erleichtern und in kurzer Zeit auch solche weitläuftige Addition beschleunigen können. Diese Vortheile nun bestehen darinnen, daß man nach den Regeln des vorhergehenden Capitels die Theile der grössern Zahlen sich bekannt macht, und hernach al-

Wie man die Addition in grösern Exempeln verrichte, und was man für Vortheile dabey anbringen könne.

le gleichnamigte Theile, oder Theile, die einerley Benennung haben, nemlich Einheiten zu Einheiten, Zehner zu Zehnern, Hunderter zu Hundertern zusammen zehlt. Diß kann nun am besten geschehen, wenn man die zu addirende Zahlen unter einander schreibt, aber so, daß man von hinten, nemlich von der Classe der Einheiten zu schreiben anfangt; weil manchmalen unter den zu addirenden Zahlen einige bey den Tausendern, andere bey den Zehentausendern, noch andere erst bey den Millionen aufhören, folglich ungleich lang sind: dahero wenn man von vornen zu schreiben anfienge, die Einheiten oft unter die Hunderter, die Zehner unter die Tausender u. s. w. zu stehen kommen würden; welches zu grossen Verwirrungen Anlaß geben könnte. Damit man endlich die herauskommende Summe von den Zahlen, welche addirt werden, sogleich unterscheiden kann; so pflegt man einen Querstrich zu ziehen, und unter selbigen erst die Summe zu schreiben. Die Summe heißt die gefundene Zahl, welche den zu addirenden zusammengenommen gleich ist. Sie wird auch das Aggregat genannt. Die Zahlen aber, welche addirt werden, heissen die Summirende. Ein Exempel solle die Sache klar machen. Man solle folgende Zahlen addiren:

Warum man bey der Addition die Zahlen von der Rechten zur Linken schreiben, und auch von hinten den Anfang zu addiren machen solle.

Was Summe oder Aggregat, und summirende Zahlen seyen.

236048

Exempel der Addition in grössern Zahlen.

2 3 6 0 4 8
4 5 3 2 9
7 8 0 1
2 8 9 1 7 8

So machen wir erstlich den Querstrich, und zehlen die Einheiten §. 15. hernach die Zehner, ferner die Hunderter u. s. w. zusammen. Nemlich 1 und 9 Einheiten geben 10, und noch 8 dazu geben 18 Einheiten, das sind 8 Einheiten und ein Zehner, folglich setzt man 8 Einheiten in die letzte Classe zur Rechten, und behält den Zehner für die zweyte Stelle; da man dann wieder sagt 4 und 2, und ein von der ersten Classe übrig behaltener Zehner geben 7 Zehner; diese setzt man in die zweyte Stelle. Nun kommen die Hunderter, nemlich acht und drey Hunderter, die zusammen eilf Hunderter, folglich einen Tausender und einen Hunderter ausmachen; dahero setzt man einen Hunderter in die Stelle der Hunderter, und den Tausender behält man für die folgende Classe. Die vierte Stelle enthält die Tausender: da man nun in den summirenden Zahlen 7 und 5 und 6 Tausender ausgedruckt und noch einen Tausender von der vorigen Classe übrig hat; so wird ihre Summe 19 Tausender, das ist 9 Tausender, und einen Zehentausender geben; den Zehentausender behält man

man für die folgende Classe, und setzt unter den Querstrich nur 9 Tausender. Die fünfte Stelle ist die Stelle der Zehentausender, deren haben wir in dem vorgeschriebenen Exempel nur 3 und 4, und einen von der vorigen Classe übrig gebliebenen Zehentausender; folglich in allem 8 Zehentausender, die man unter den Querstrich setzet. Nach diesen folgen die Hunderttausender, welche an der Zahl zwey sind, und, da weder die übrige summirende Zahlen so weit gehen, noch auch von den vorigen Stellen was übrig geblieben ist, schlechterdings unter den Querstrich zu äusserst zur Linken gesetzt werden. Die ganze Summe heisset demnach zwey hundert und neun und achtzig tausend, ein hundert und acht und siebenzig.

Beweis der Addition.

§. 24. Daß nun dieses die richtige Summe seye, lässet sich leicht beweisen. Dann wann die gefundene Zahl den gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist, so hat nach §. 23. die Sache ihre Richtigkeit. Da nun das Ganze seinen wirklichen Theilen zusammengenommen gleich ist, und wir in dem vorgegebenen Exempel alle vorgeschriebene Einheiten, alle Zehner, alle Hunderter, alle Tausender, u. s. w. aus welchen nemlich die ganze Summe besteht, zusammengezehlt

zehlt haben, so kann es nicht fehlen, die gefundene Zahl muß den obigen Zahlen zusammen genommen gleich seyn. Diß ist der Beweis von den Regeln der Addition überhaupt. Nun ist es zwar möglich, daß, wenn man nicht geübt ist, leicht ein Fehler im Zusammenzehlen vorgehen kann: dahero es räthlich ist, daß man bey wichtigen Exempeln die Rechnung noch einmal durchgeht; welche Wiederholung man eine Probe nennen kann. Man hat zwar eine sogenannte Neuner-Probe, nach welcher man in den summirenden Zahlen und in der Summe gleichviel Neuner wegwirft, und was nach den weggeworfenen Neunern übrig bleibt, mit einander vergleicht. Ist der Rest beederseits einerley, so hat man nicht gefehlt; ist er aber verschieden, so muß ein Fehler vorgegangen seyn, folglich das Exempel noch einmal gemacht werden. Allein diese Probe ist so beschaffen, daß man bey derselben fast leichter fehlen kann, als bey der Addition selbst; neben dem ist sie auch so weitläuftig, daß man weniger Zeit braucht, das Exempel noch einmal durchzugehen, als diese Probe zu machen; welche ohnehin nicht einmal sicher und zuverläßig ist, wenn man bey der Addition selbst nicht fleißig bemerkt hat, wie oft man neune von den für die folgende Stellen aufbehaltenen Zahlen weg-

Was von der sogenannten Neunerprobe zu halten seye?

weggeworfen habe. Eine Probe aber, die beschwerlicher und weitläuftiger ist als die Operation selbst, die sie probieren solle, neben dem auch den Rechner gleich grosser, ja noch grösserer Gefahr zu irren aussetzet, scheinet mir nicht so bequem zu seyn, als die Wiederholung der Rechnung selbst, wenn man ja glaubt, daß man gefehlt habe. Inzwischen kann man sie, weil sie doch eingeführet ist, beybehalten und sich bekannt machen; wiewohlen man noch viele andere, und zwar leichtere Proben der Addition, z. E. durch die erst zu erlernende Subtraction, erfinden und angeben könnte, wenn es der Mühe werth wäre, das was an sich so leicht ist, mit andern gleich faßlichen und leichten Methoden ohne sonderlichen Nutzen zu vervielfältigen. Man muß Zeit und Mühe, so viel möglich ist, bey Kleinigkeiten sparen, wenn man in den Wissenschaften einen gründlichen und schnellen Fortgang bekommen will. Was übrigens die Fertigkeit betrifft, einfache Zahlzeichen zusammen zu zehlen, so überläßt man die ganze Kunst einer fleißigen Uebung. Anfänglich, bis man besser geübt ist, kann man sie an den Fingern zusammen zehlen. Dann es kommen nie auf einmal so viele Zahlzeichen vor, daß man ausser Stande wäre, sie ohne neue Hülfsmittel und Regeln addiren zu kön-

Wie man eine Fertigkeit im Addiren bekomme?

können. Die Vortheile, die man zur Fertigkeit im Denken aus dieser ersten Rechnungsart lernen kann, habe ich in meinen Principiis cogitandi Part. pract. C. III. angemerket.

§. 25. Es ist ohne unser Erinnern klar, daß das gegebene Exempel der Addition Zahlen von einerley Art in sich begreiffe, unerachtet wir die eigentliche Einheiten, z. E. Thaler, Gulden oder Kreuzer, nicht genannt haben: darum heißt auch dieses Addiren ein Addiren in **ungenannten Zahlen**. Wenn man aber die Einheiten nennt, so addirt man in **genannten Zahlen**. Wir müssen von dieser Rechnung auch ein Exempel geben, weil es insbesondere eine stattliche Vorbereitung zur Buchstabenrechnung heissen kann. Man solle zu

Warum die bisher vorgetragene Art zu addiren ein Addiren in ungenannten Zahlen heisse?

Was die Addition in genannten Zahlen seye?

	3 fl.	5 kr.	3 Hllr.
addiren	2 fl.	58 kr.	5 Hllr.
so hat man	5 fl.	63 kr.	8 Hllr.

Weil aber 6 Hllr. auf einen Kr. und 60 Kr. auf einen Gulden gehen; so pflegt man schicklicher die Summe der Heller, die einen Kr. ausmachen, in die Stelle der Kreuzer, die Summe der Kr. die einen Gulden ausmachen, in die Stelle der Gulden u. s. w. zu setzen. Dahero obiges Exempel auch folgende Summe giebt,

giebt, welche der vorigen ganz gleich ist: nemlich 6 fl. 4 kr. 2 Hllr. Nur muß man wissen, wie viel Heller auf einen Kr. wie viel Kr. auf einen fl oder in andern Ländern, wie viel Heller auf einen Groschen, wie viel Groschen auf einen Thaler u. s. w. gehen. Eben so muß man das Maas der Früchten u. s. w. inne haben. Allein bey der Buchstabenrechnung hat man dergleichen Kenntniß schon nicht nöthig: man setzet die Einheiten von gleicher Art, zusammen, ohne daß man wissen müßte, wie viel *c* auf ein *b*, wie viel *b* auf ein *a* und so weiter giengen. Wir wollen noch ein Exempel in genannten Zahlen geben, um den Weg zu dieser schwerscheinenden aber in der That leichten Kunst desto besser zu bahnen. Die Zeichen, die man wissen muß, habe ich in der Einleitung erklärt; dahero ich hier nichts weiter sagen will, als nur die Leser erinnern, + heisse plus oder mehr, und — heisse minus oder weniger. Wenn aber am Anfang der Zahl gar kein Zeichen stehet, so setzt man allemal im Sinn das Zeichen + oder plus hinzu. Man solle nun addiren:

Wie die Addition in genannten Zahlen den Weg zur Buchstabenrechnung bahne.

5 fl. + 6 kr. — 4 Hlr.
2 fl. — 2 kr. — 1 Hlr.

so hat man 7 fl. + 4 kr. — 5 Hlr.

Dann

Denn daß 5 und 2 fl. zusammen 7 fl. machen, ist klar. Daß aber + 6 kr. — 2 kr. nicht mehr als + 4 kr. geben, erhellet daher: weil einer, der sechs Kreutzer hat und zween Kreutzer wieder mangelt, oder zween Kreutzer davon weggeben solle, eben deßwegen nur noch vier Kreutzer übrig behält. Eben so ist endlich auch leicht zu begreiffen, daß — 4 Hlr. und — 1 Hlr. zusammen — 5 Hlr. geben; denn wenn einem 4 Heller und wiederum ein Heller fehlen, so fehlen ihm zusammen fünf Heller.

Regeln und Exempel der Addition nach der Buchstabenrechnung.

§. 26. Diese Rechnung ist nun der ganze Grund von der ersten Operation, oder von der Addition, in der Buchstabenrechnung. Man solle z. E. addiren:

$$\begin{array}{l} 5a + 6b - 4c \\ 2a - 2b - c \\ \hline \end{array}$$

so hat man $7a + 4b - 5c$

In welchem Falle a Gulden, b Kreutzer, c Heller, oder was man sonsten will, bedeuten können. Auf gleiche Weise bekommt man, wenn man addirt

$$\begin{array}{l} 3a - 8b + 5c - 6d \\ 2a + 3b - 2c - 5d + 3g \\ \hline 5a - 5b + 3c - 11d + 3g \end{array}$$

D Dann

Dann 2 a und 3 a geben zusammen 5 a; — 8 b und + 3 b geben — 5 b. Wenn z. E. b Kreuzer bedeuten, so ist klar, daß einer, der 3 Kreuzer hat und 8 davon weggeben solle, zu Bezahlung seiner Schuld noch 5 Kreuzer zu wenig hat. u. s. w. Die letzte 3 g haben keinen gleichen Namen in der obern Classe, folglich werden sie eben in der Summe besonders gesetzt. Man siehet auch in dieser Rechnung, daß es gleich viel ist, ob man von vornen oder von hinten zu addiren anfangt: weil es hier nicht auf die Stelle der Buchstaben ankommt, oder weil die Stellen der Buchstaben keinen weiteren Werth bestimmen. Nur muß man immer gleiche Buchstaben zusammenzehlen, sie mögen hernach stehen, wo sie wollen. Die Addition der Buchstaben ist also wirklich viel leichter als die gewöhnliche Addition in genannten Zahlen §. 23. und die ganze Kunst bestehet darinnen, daß man die Zeichen + und — wohl bemerke, und in der unten gezogenen Summe dasjenige, was gegen einander aufzuheben ist, wie wir gezeigt haben, richtig aufhebe.

Vortheile der Buchstabenrechnung.

§. 27. Die andere Art, die Zahlen zu vermehren, heißt die Multiplication §. 22. folglich sollten wir nach der Ordnung jetzo davon handeln. Weil aber in allen mathematischen Schriften die Subtraction gleich

Warum man nicht so gleich nach der Addition von der Mul-

gleich nach der Addition abgehandelt wird, und die sogenannte zweyte Species ist; so finden wir uns, um keine Neuerung zu machen, nunmehro genöthiget, die Regeln der Subtraction zu erklären, wenn wir vorhero gezeigt haben, wie die Zahlen vermindert werden. Eine Zahl kann kleiner werden, wenn man entweder viele und zerschiedene andere Zahlen von einer Art nach und nach von ihr wegnimmt, oder wenn man nur eine einige Zahl, so oft als möglich ist, von ihr abziehet: oder überhaupt, man kann eine Zahl vermindern, wann man eine andere von ihr hinwegnimmt, ohne darauf zu sehen, um wie vielmal sie kleiner worden seye, als sie vorhin war; ich sage um wie vielmal und nicht um wie viel. Man kann sie aber auch vermindern, wenn man sich bemühet, sie genau so vielmal kleiner zu machen, als man verlanget, z. E. zweymal, oder dreymal, oder sechsmal kleiner, als sie vorhin war. Jenes heißt subtrahiren, dieses dividiren. Wir reden aber bey diesen Vermehrungs- und Verminderungsarten von ganzen Zahlen: dann in gebrochenen Zahlen pflegt die Multiplication zu vermindern, und die Division zu vermehren, wie wir zu seiner Zeit erweisen werden.

tiplication, als der zweyten Art, die Zahlen zu vermehren, handle?

Wie die Zahlen kleiner oder vermindert werden?

§. 28. Subtrahiren heißt also nichts anders, als eine gegebene Zahl um eine

Erklärung der Subtraction.

andere gleichfalls gegebene Zahl kleiner machen, oder von einer gegebenen Zahl eine andere hinweg nehmen, damit man wisse, was nach geschehener Operation übrig bleibe. Z. E. ich solle von sechs abziehen viere, so bleiben zwey übrig. Herr v. Wolf erklärt deswegen die Subtraction durch die Erfindung einer Zahl, welche mit der abzuziehenden Zahl zusammengenommen der zu vermindernden Zahl gleich ist. Dann wie 6 — 4 = 2, so ist auch 2 + 4 = 6. Und das ist die sogenannte Probe der Subtraction. Wir wollen aber unsere obige Erklärung beybehalten, und diß einige noch melden, daß die Zahl, von welcher eine andere abgezogen wird, die zu vermindernde Zahl (numerus minuendus), diejenige, welche abgezogen wird, die abzuziehende Zahl (numerus subtrahendus), und die gefundene, welche nach geschehener Operation übrig bleibet, der Rest oder die Differenz, (Residuum vel differentia) genannt wird. Dieser letztere Name hat seinen guten Grund. Denn der Rest zeiget an, um wie viel die eine von den gegebenen Zahlen grösser oder kleiner sey als die andere; z. E. 6 — 4 = 2; also ist 6 um 2 grösser als 4, und 4 um 2 kleiner als 6; folglich 2 der Unterscheid oder die Differenz zwischen 6 und 4. Man muß sich das Wort Differenz vorzüglich bekannt ma-

Warum der Rest auch die Differenz oder der Unterschied genannt [illegible].

machen, weil es bey den arithmetischen Verhältnissen und Progressionen wiederum vorkommt, und zum Verstand derselben vieles beyträgt.

§. 29. Nunmehro haben wir zu zeigen, wie die Regeln der Subtraction in ungenannten grössern Zahlen mit Vortheil angewandt werden können. Die Sache hat an sich selbst keine Schwürigkeiten. Dann weil eine jede Zahl aus Einheiten, Zehnern, Hundertern, Tausendern bestehet; so ist klar, daß man die Einheiten von Einheiten, Zehner von Zehnern, Hunderter von Hundertern u. s. w. nach und nach abziehen, folglich abermal, wie bey der Addition, von hinten anfangen, auch alle Verwirrung zu vermeiden, die gegebene Zahlen von der gesuchten Differenz durch einen Querstrich absondern müsse. Z. E. man solle von 2486

Regeln der Subtraktion.

abziehen 1254

so ist der Rest 1232

dann er enthält die Differenz aller Einheiten, Hunderter, Tausender u. s. w. 4 Einheiten von 6 Einheiten lassen übrig 2 Einheiten; 5 Zehner von 8 Zehnern lassen übrig 3 Zehner; 2 Hunderter von 4 Hundertern lassen übrig 2 Hunderter; 1 Tausender von 2 Tausendern läßt übrig 1 Tausender. Die gefundene Zahl ist also die Summe aller übriggebliebenen Ein-

Beweis der Subtractions-Regeln.

 hei-

heiten, Zehner, Hunderter und Tausender; folglich die wahre Differenz zwischen den zwo gegebenen Zahlen. Und das ist der Beweis der Subtraction. Neben diesem Beweis hat man auch eine leichte Probe der Subtraction, die sich auf die Wolfische Erklärung und auf die Natur der ganzen Operation §. 28. gründet. Wenn man nemlich die gefundene Zahl zur gegebenen kleinern Zahl addirt; so muß die grössere wieder heraus kommen. Diese Probe ist natürlich und leichter als die Wiederholung der Operation selbst: weil das Addiren leichter ist als das Subtrahiren, und man, die Probe zu machen, nur zwo Reyhen von Zahlen addiren darf. Diejenige Schwürigkeiten, die wir §. 24. berührt haben, fallen also hier gänzlich hinweg. In unserm vorgegebenen Exempel wird demnach die grössere Zahl wieder heraus kommen, wenn man die gefundene Differenz zu derjenigen Zahl, die man abgezogen hatte, addiret.

Probe der Subtraction; und warum auf diese Probe mehr als auf die gewöhnliche Probe der Addition gehalten werde.

Minuendus	2486
Subtrahend.	1254
Different.	1232
Minuendus	2486

So oft nun dieses geschiehet, so oft hat man ein sichres Kennzeichen, daß man recht gerechnet habe; wenn man anders in der Probe selbst nicht fehlet.

§. 30.

§. 30. Das gegebene Exempel ist von der leichtesten Art. Es sind aber noch zwo Gattungen der Subtraction übrig, welche etwas schwerer scheinen. Die eine ist, wenn man eine grössere Zahl von einer kleinern abziehen solle; die andere, wenn in der zu vermindernden Zahl Nullen vorkommen. In beeden Fällen muß man von den unmittelbar vorhergehenden Stellen etwas entlehnen, damit eine gegebene Zahl entweder von einer kleinern, oder von einer Stelle der Nullen wirklich abgezogen werden könne. Da nun in der unter uns üblichen Zahlenordnung eine jede Stelle zehenmal grösser oder kleiner ist, als die unmittelbar daneben stehende; so wird eine jede für die unmittelbar niedrere Stelle entlehnte Einheit zehenmal so groß seyn, als die Einheit derjenigen Stelle, in welche sie entlehnt wird. Folglich wenn ich aus der Zehnerstelle eine Einheit für die eigentlich sogenannte Einheiten entlehne, so werde ich zehen Einheiten bekommen; entlehne ich aus der Stelle der Hunderter eine Einheit, oder einen Hunderter, für die Stelle der Zehner, so bekomme ich zehen Zehner u. s. w. Hieraus siehet man, daß, wenn man die Zahlzeichen, von welchen eine Einheit in ihrer Art, z. E. ein Zehner, ein Hunderter, ein Tausender entlehnt worden ist, mit einem Punkt bezeich-

Zwo schwerere Gattungen der Subtraktion werden angezeiget;

wie man es machen müsse, wenn man in ungenannten Zahlen das grössere von dem kleinern abziehen solle;

und was das Entlehnen seye?

zeichnet, auch solche Exempel, wo man das Grössere hie und da vom Kleinern abziehet, sich nach den allgemeinen Regeln der Subtraction behandeln lassen. Z. E.

Exempel und Beweis vom Entlehnen.

3'42'5
918
———
2507

Dann 8 Einheiten kann ich von fünf Einheiten nicht abziehen, folglich entlehne ich eine Einheit aus der Stelle der Zehner: eine Einheit aber aus der Stelle der Zehner ist ein Zehner, oder zehen Einheiten von der ersten Classe gleich; folglich habe ich zusammen fünfzehen Einheiten, von welchen ich acht wohl abziehen kann; ich schreibe also unter den Querstrich sieben, weil 15 — 8 = 7. Hernach subtrahire ich einen Zehner von dem obigen Zehner, welcher wegen dem Punkt durch die geschehene Entlehnung um eins verringert, und da er vorhero ein zweyfacher Zehner war, jezo nur noch ein einfacher ist. Der Rest davon ist also Nulle, welche ich in die Stelle der Zehner unter den Querstrich setze. Ferner sollte ich neun Hunderter von vier Hundertern subtrahiren: weil nun dieses nicht geschehen kann, so entlehnte ich aus der folgenden Stelle der Tausender eine Einheit, welche zehen Hundertern gleich ist; ich werde auf diese

Weise

Weise vierzehen Hunderter bekommen, von welchen sich neun Hunderter füglich abziehen lassen, indeme der Rest noch fünfe enthält. Weil ich endlich von den drey Tausendern eine Einheit entlehnt, so bleiben nur noch zween übrig, welche gleichfalls unter den Querstrich zur Differenz in die Stelle der Tausender gesetzt werden.

Was man zu thun habe, wenn man wirkliche Grössen von Nullen abziehen solle, oder wenn in der zu vermindernden Zahl Nullen vorkommen.

§. 31. Sollen aber in der zu vermindernden Zahl Nullen vorkommen, so verfährt man abermal auf gleiche Weise, nur mit dem Unterschied, daß die Nullen, von welchen man ohnehin nichts entlehnen kann, nach geschehener Entlehnung von dem nächsten Zahlzeichen, im Sinne zu Neunern gemacht werden müssen. Die Ursache davon ist leicht zu begreiffen. Denn wenn ich z. E. von 20 eins wegnehme, so bleibt 19; also wird, weil ich nur eins wegnehme, die letzte Nulle zum Neuner, und der zweyfache Zehner, von dem ich einen entlehnen mußte, zu einem einfachen Zehner. Wiederum, wann ich von 200 eins hinweg nehme, so bleibt 199; und die beede Nullen werden Neuner: nehme ich von 200 zwey hinweg, so bleibt 198; und die letzte Nulle, welche um einen Zehner vermehrt worden, folglich gleich ist + 10, wird achte übrig lassen, die nächste Nulle aber in einen Neuner verwandelt. Wiederum, wenn

Warum die Nullen nach geschehener Entlehnung zu Neunern werden.

ich 2 von 2000 abziehe, so bleiben übrig 1998; hier werden abermal alle zwischen der letzten Nulle und dem nächsten Zahlzeichen stehende Nullen in Neuner verwandelt. Auf gleiche Weise läßt sich nun begreiffen, daß auch in grossen Exempeln, die man nicht im Kopfe rechnen kann, diese Veränderung statt haben müsse. Der Beweis davon ist nicht schwer. Dann wie 10 = 9 + 1, und 100 = 9 Zehnern + 9 Einheiten + 1; so sind auch 1000 = 9 Hundertern + 9 Zehnern, + 9 Einheiten + 1. Wenn demnach nur eine Einheit der letzten Classe subtrahirt werden solle; so ist die Differenz = 9 Hundertern, + 9 Zehnern + 9 Einheiten u. s. w. Nun werden die Exempel von dieser Gattung leicht zu machen seyn. Man solle

Beweis und Exempel davon.

von	48'0'0'0'0'28
subtrahiren	25030046
so ist der Rest	22969982

Dann 6 von 8 läßt 2, 4 von 2 kann man nicht abziehen, folglich entlehnt man von dem nächsten Zahlzeichen, 8, welches schon in der Stelle der Millionen steht, eine Einheit der Millionen, wodurch ruckwerts alle dazwischen ligende Nullen in Neuner und der Zweyer in 2 + 10 oder in 12 verwandelt wird. Nun sage ich 4 von 12 läßt 8; ferner 0 von 9 läßt 9; 0 von 9 läßt 9, 3 von 9 läßt 6, 0 von 9 läßt 9,

5 von

5 von 7 läßt 2, und 2 von 4 läßt 2. Um mehrerer Gewisheit willen darf man nur die §. 29. vorgeschriebene Probe nachmachen.

Von der Subtraction in genannten Zahlen.

§. 32. Wie man mit genannten Zahlen addirt, so kann man auch genannte Zahlen von einander subtrahiren. Z.E. man solle von 6 fl. 40 kr.
subtrahiren 4 fl. 25 kr.
so ist der Rest: 2 fl. 15 kr.

Dieses Exempel ist klar und faßlich genug. Wenn man aber das kleinere vom grössern subtrahiren solle, so scheinet die Sache mehr Schwürigkeit zu haben. Allein man kann eine solche Aufgabe nach zwo Methoden auflösen. Dann entweder muß ich eben wissen, wie viel Kreutzer auf einen Gulden gehen, und wo es nöthig ist, für einen Gulden Kreutzer entlehnen u. s. w. oder ich darf nur, wenn ich das grössere vom kleinern abziehen solle, die Operation umkehren, und das kleinere vom grössern subtrahiren, den Rest aber hernach negativ oder mit dem Zeichen minus bemerken und setzen.

Wie man die Sache anzugreiffen habe, wenn man in genannten Zahlen das grössere vom kleinern abziehen solle?

Erste Methode.

Z. E. weil sechzig Kreutzer auf einen Gulden gehen, so werde ich durch Hülfe des Entlehnens, folgende Aufgabe leicht berechnen können. Man solle nemlich

von

von	18 fl.	36 kr.
abziehen	12 fl.	40 kr.
so hat man	5 fl.	56 kr.

Denn wenn ich zu 36 kr. noch für einen Gulden Kreutzer entlehne, so habe ich 60 + 36 kr. das ist 96 kr. von diesen lassen sich 40 kr. abziehen, und bleiben übrig 56 kr. die Gulden aber werden eben deßwegen um einen vermindert: dahero man hernach die 12 fl. nicht von 18 sondern nur von 17 fl. abziehen darf. Allein die andere Art, die ich sogleich anführen werde, ist kürzer und bequemer: denn wenn ich das obige Exempel noch einmal setze,

Zweyte und leichtere Methode.

18 fl.	36 kr.
12 fl.	40 kr.
so ist der Rest 6 fl.	minus 4 kr.

Beweis und Nutzen dieser Methode.

denn ich darf nur 36 von 40 subtrahiren, und sagen, der Rest 4 ist negativ: dann 6 fl. weniger 4 kr. ist eben so viel als 5 fl. + 56 kr. Diese Art zu subtrahiren hat nicht nur in verschiedenen weitläuftigen Exempeln, wie ich bey der Berechnung des julianischen Periodus in meinem Examine temporum gezeigt habe, ihre grosse Vortheile, sondern sie bahnet uns auch den Weg zur Subtraction in der Buchstabenrechnung; welche wir jetzo vollends erklären wollen.

§. 33.

§. 33. Man giebt in der Buchstabenrechnung verschiedene Regeln vom Subtrahiren, deren aber diejenigen leicht entübriget seyn können, welche den Grund davon einsehen und verstehen. Man kann plus von plus, minus von minus, plus von minus, minus von plus, grösser von kleinerm, und kleineres von grösserm subtrahiren. Alle diese Fälle kommen hier vor; sie sind aber gar nicht schwer, wenn man nur in dem Nachdenken sich ein wenig üben mag. Es ist natürlich, daß, wenn ich

Von der Subtraction in der Buchstabenrechnung.

Erster Fall, wenn man plus von plus, und zwar das Kleinere vom Grösseren subtrahirt.

$$\begin{array}{ll} \text{von} & 4a + 3b + c \\ \text{subtrahire} & 3a + b + c \\ \hline \text{der Rest} & a + 2b \text{ heisset;} \end{array}$$

das ist der erste und leichteste Fall: dann c von c geht auf, ein b von $3b$ läßt $2b$, und $3a$ von $4a$ läßt ein a. Wenn man ferner bey einerley Zeichen das grössere vom kleinern abziehet; so kehrt man, wie ich §. 3[illegible]. gezeigt habe, die Operation um, und zieht das kleinere vom grössern ab, setzt aber dem Rest das entgegen stehende Zeichen vor. Z. E.

Zweyter Fall, wenn man plus von plus, aber zugleich das Grössere von dem Kleinern subtrahirt.

$$\begin{array}{ll} & 5a + 2b + 3c \\ & 2a + 6b + 4c \\ \hline \text{läßt übrig} & 3a - 4b - c \end{array}$$

dann $2a$ von $5a$ lassen $3a$; $6b$ von $2b$

kann ich nicht abziehen; ich kehre es aber um, und ziehe $2b$ von $6b$ ab, und bemerke den Rest $4b$ mit dem Zeichen — oder minus. Denn wenn z. E. der Buchstabe b Kreutzer, und der Buchstabe a Gulden bedeuten sollte; so wird ja (5 fl. + 2 kr.) — (2 fl + 6 kr.) = 3 fl. — 4 kr. oder 3 fl. weniger 4 kr. Oder überhaupt, wenn einer zween Kreuzer hat, und solle sechs davon bezahlen, so werden ihm nothwendiger Weise noch vier dazu fehlen; und das zeigt man im Rest an, wie viel ihm zu Bezahlung dieser Schuld noch fehle. Eben so macht mans, wenn man von $3c$ subtrahiren solle $4c$; da dann ein c noch fehlet. Das wird unten im Rest angezeigt. Vielleicht drückt man sich auf diese Weise faßlicher aus, als wenn man sagt, minus $4b$ bleiben übrig. Dann die Redensart **übrig bleiben**, oder das lateinische Residuum zeigt etwas positives an. Und das ist eben die Ursache, warum sich so manche darüber aufhalten, wenn sie hören, daß sich die Mathematik mit weniger als nichts beschäfftige. Allein der Scheinwiderspruch hänget blos von dem Schall und Klange eines Worts oder einer Redensart ab, die man nicht hinlänglich verstehet. In der höhern Geometrie sind viele negative Grössen wirkliche Grössen, und sie heissen negativ, weil sie der positiven Grösse in einer

Exempel und Beweis davon.

Woher es komme, daß manchen das mathematische weniger als nichts so fremde und ungereimt scheine?

Vorläufige und kurze Erläuterung dieses Ausdruks.

ner entgegen gesetzten Richtung liegen. Eben so muß man auch die negative Zahlen in der Arithmetik aus dem rechten Gesichtspunkt beurtheilen, wenn man davon vernünftig urtheilen will; wie wir an seinem Ort, so oft es Gelegenheit giebt, zeigen werden. Uebrigens kann man sich von dem **weniger als nichts**, einigermassen einen Begriff durch die Vorstellung eines Menschen machen, der mehr Schulden hat, als er zu bezahlen im Stande ist. Wiewohlen es wenige Fälle giebt, in welchen dieses Gleichniß die verneinende Grössen in der Mathematik hinlänglich erläutern könnte. Anfänger aber können sich damit eine Zeitlang helfen, und alle schwerscheinende Exempel dadurch erklären.

Andere aber nicht so oft vorkommende Fälle der Subtraktion.

§. 34. In der Buchstabenrechnung giebt es bey dem Subtrahiren noch mehr Fälle, ausser den beeden, die wir angeführt haben. Sie kommen aber nicht so oft und häufig vor. Wer sich die beede §. 33. erklärte Exempel recht bekannt macht, der wird in manchen Rechnungen fortkommen können, wenn er auch die übrige Fälle nicht wissen sollte: doch wollen wir sie auch noch erklären. Man kann minus von minus, plus von minus, und minus von plus subtrahiren. Wir handeln zuerst vom letzten Falle. Wenn ich von 3 fl. subtrahire

1 fl.

Dritter Fall, wenn minus von plus subtrahirt wird.

1 fl. weniger 6 kr. so bleibet nothwendiger Weise 2 fl. + 6 kr. übrig: dann indem ich den ganzen Gulden abgezogen, so habe ich zugleich 6 kr. zu viel abgezogen, folglich muß ich sie im Rest wieder addiren. Demnach giebt minus von plus im Rest plus. Wenn ich also von $3a$ subtrahire $a - 6b$ so bleiben übrig $2a + 6b$; oder in förmlichen Exempeln:

$4a + 3b$	4 fl. + 3 kr.
$2a - 5b$	2 fl. — 5 kr.
$2a + 8b$	2 fl. + 8 kr.

Wenn ich also minus von plus abziehe, so darf ich nur die Zahlen addiren, und die Summe im Rest mit dem Zeichen plus bemerken. Der zweyte Fall ist, wenn man plus von minus subtrahiren muß. Ich habe 3 fl. weniger 6 kr. davon sollen subtrahirt werden 2 fl. plus 3 kr. so werden mir im Rest bleiben 1 fl. weniger 9 kr. In diesem Fall darf ich also nur wiederum die Zahlen addiren, ihre Summe aber mit dem Zeichen minus bemerken. Z. E.

Vierter Fall, wenn plus von minus subtrahirt wird.

$3a - 6b$	3 fl. — 6 kr.
$2a + 3b$	2 fl. + 3 kr.
$a - 9b$	1 fl. — 9 kr.

Es ist noch ein Fall übrig, da man minus von minus subtrahiret. Diß geschie-

schiehet auf eine doppelte Weise: ich solle von 2 fl. weniger 10 kr. subtrahiren 1 fl. weniger 4 kr. so werde ich im Rest haben 1 fl. weniger 6 kr. dann weil ich die 4 kr. nicht subtrahiren darf, so wird der obige Mangel von 10 kr. um 4 geringer, folglich nur noch 6 kr. seyn. Hingegen wenn ich von 2 fl. weniger 10 kr. subtrahire 1 fl. weniger 12 kr. so habe ich im Rest 1 fl. plus 2 kr. Die Ursache ist leicht zu begreiffen: der obige Mangel von 10 kr. wird nicht nur aufgehoben, sondern in eine positive Grösse verwandelt, welche dem Ueberschuß der untern Zahl gleich ist. Folglich geht es hier wie bey der ersten Operation, wenn man plus von plus subtrahiret; §. 33. die abzuziehende Zahl mag hernach grösser oder kleiner seyn. Z. E.

Fünfter Fall, wenn minus von minus subtrahirt wird, es mag hernach das kleinere vom grössern oder das grössere vom kleinern subtrahirt werden.

$$\begin{array}{r} 2a - 10b \\ a - \ \ 4b \\ \hline a - \ \ 6b \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a - 10b \\ a - 12b \\ \hline a + \ \ 2b \end{array}$$

Denn wenn ich neben dem abgezogenen a die $4b$ im ersten, oder die $12b$ im andern Fall auch noch abzöge; so würde ich würklich zu viel abziehen, weil ich nicht das ganze a, sondern das um 4 oder $12b$ verminderte a abziehen darf. Demnach muß ich diese 4 oder $12b$ wieder addiren: dann gerade um so viel b würde ich sonsten zu viel subtrahiren. Das sind nun

Exempel, worinnen alle Fälle vorkommen.

alle Fälle, die bey dem Subtrahiren vorkommen, und in folgendem Exempel enthalten sind:

$$\begin{array}{l} 4a + 3b - 5c + 8d - 7e - 2f \\ 3a + 8b + 4c - 8d - 3e - 6f + g - 2h \\ \hline a - 5b - 9c + 16d - 4e + 4f - g + 2h \end{array}$$

Erläuterung des gegebenen Exempels.

Ein einiger Fall scheinet übrig zu seyn; der sich aber von selbst verstehen läßt. Ich habe in dem zu subtrahirenden Reyhen die Buchstaben $+ g - 2h$ gesetzt, welche sich in dem zu vermindernden Reyhen auf keine ähnliche Buchstaben beziehen, und dennoch subtrahirt worden sind. Allein wenn ich von 3 fl. subtrahire 1 fl. + 3 kr. so habe ich auch in der zu vermindernden Zahl keine Kreutzer, und doch sage ich: es bleiben mir im Rest 2 fl. weniger 3 kr. Eben so bleiben mir 2 fl. + 3 kr. übrig, wenn ich von 3 fl. subtrahire 1 fl. weniger 3 kr. Das Exempel ist so deutlich, daß ich nicht nöthig habe, zur Erläuterung noch etwas hinzu zu setzen. Eines aber muß ich zum Beschluß vornehmlich anmerken, und meine Leser bitten, sich dasselbige bekannt zu machen. Wer das obige Exempel nur obenhin ansiehet, wird finden, daß der Rest eben so ausfallen würde, wie er ausgefallen ist, wenn man die Zeichen der zu subtrahirenden Zahl verändert, das ist, allemal aus plus mi-

Eine allgemeine, kurze und höchstnützliche Regel für alle Fälle der

nus

nus und aus minus plus gemacht, und hernach beede Reyhen addirt hätte. Aus dieser Anmerkung läßt sich eine einige allgemeine kurze und faßliche Regel für alle nur mögliche Fälle der Subtraction in Buchstaben, abstrahiren, welche folgendermassen ausgedrückt wird: **verändere alle Zeichen der abzuziehenden Zahl, und addire nach geschehener Veränderung. Oder verwandle bey der abzuziehenden Zahl die Zeichen plus in minus und minus in plus, hernach addire beede Zahlen.** Diese Regel ist ungleich besser, als diejenigen, welche für alle einzele Fälle besonders eingerichtet sind, und weil sie schwer zu lernen sind, auch nicht gleich oft vorkommen, das Gedächtnis nicht nur beschweren, sondern auch bald wieder vergessen werden.

Subtraction in der Buchstabenrechnung.

Grosse Vortheile dieser Regel.

§. 35. **Multipliciren** heißt eine Zahl etlichmal zu sich selbst addiren; die Multiplication in ganzen Zahlen ist also wirklich eine Art die Zahlen zu vermehren. Diejenige Zahl, welche etlichmal zu sich selbst addirt wird, heißt die zu multiplicirende Zahl; die andere Zahl, welche anzeigt, wie oft die erste zu sich selbst addirt worden, ist der **Multiplicator**; beede zusammen heissen die **Factores** oder die **Efficientes**. Die nach geschehener Operation erfundene oder herauskommende Zahl nennet man das **Factum** oder das **Product**.

Was Multipliciren seye.

Nahmen, die bey der Multiplication vorkommen. Nemlich Product, oder factum, factores oder efficientes, multiplicator u. s. w.

Z. E. ich solle sechs mit drey multipliciren, so sind 6 und 3 die Factores; 3 mal 6 oder 18 aber ist das Product oder Factum. Die Multiplication selbst geschiehet wirklich durch eine schnelle Addition; und zwar im vorgeschriebenen Fall, durch eine dreymalige Addition des Sechsers zu sich selbst: denn wenn ich 6 dreymal zu sich selbst addire, wie im beygesetzten Exempel,

6
6
6

so ist die Summe: 18

Diese Summe heisset nun in der Multiplication ein Product. Weil aber eine solche Operation zu weitläufftig würde, wenn ich grosse Zahlen z. E. 324 mit 256 multipliciren oder zweyhundert und sechs und fünfzig mal zu sich selbst addiren sollte; so hat man auf Mittel gedacht, die gewöhnliche aber dabey langsame Addition in eine schnellere, kürzere und weniger Platz einnehmende Addition zu verwandeln. Und das geschiehet durch Hülfe des Einmal eins oder der pythagorischen Rechentafel, welche man auswendig lernen, oder, so oft man multiplicirt, beständig vor Augen haben muß. Diese Rechentafel ist nichts anders als eine wirkliche Addition aller möglichen einfachen Zahlen, so oft sie sich nach ihren Einhei-

Wie und warum man in der Multiplication die gewöhnliche Addition blos in eine schnellere Addition verwandle.

heiten zu sich selbst addiren lassen. Z. E. was ist die Summe, wann 9 zu sich selbst 9 mal, oder 8 mal, oder 7 mal, oder 6 mal u. s. w. addirt wird. Ueber die Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. darf die Rechentafel nicht hinausgehen. Dann von zehen bis hundert kommen alle einfache Zahlen wieder vor; so auch von hundert bis tausend u. s. w. Man hat also genug, wenn man diese schnelle Addition von 1 bis 9 auswendig kann: weil die weitere Stellen durch die Decimalprogreßion von selbsten nach dem ersten Capitel bestimmt werden. Nur muß man Achtung geben, ob man mit eigentlichen Einheiten, oder mit Zehnern, oder mit Hundertern u. s. w. multiplicire; in welchem Fall die Zahlzeichen so viel Nullen hinter sich bekommen, um so viel Stellen sie ihrem Werth und Rang nach vorgerückt werden. Doch darf man die Nullen nicht ausdrucken, wenn man nur die Stelle oder den Rang im Anfang gleich genau beobachtet. Endlich siehet man leicht, daß die Erfindung dieser schnellen Addition sich auf die gewöhnliche und bey uns eingeführte arabische Zahlzeichen gründe, folglich bey andern Zeichen nicht statt habe, wenigstens wenn sie statt finden sollte, vorher nach der Menge der Zeichen verändert werden müßte. So darf man z. E. bey der Leibnizianischen Dyadik das

Warum das Einmal eins nur bis an 10 oder 9 gelernet werden dürfe.

Worauf sich die Erfindung des Einmal eins gründe;

warum es bey der Leibnizianischen

Warum das Einmal eins in der Algebra und bey der blosen Buchstabenrechnung nicht statt finde?

Einmal eins nicht wissen, und kann doch alles multipliciren, wenn man nur dupliren kann. Auf gleiche Weise braucht man zur Multiplication der Buchstaben als Buchstaben gar kein Einmal eins, wie wir an seinem Ort zeigen werden. Hingegen zur gewöhnlichen Multiplication unserer eingeführten Zahlzeichen muß man das Einmal eins wissen. Und es ist eine blose Trägheit, wenn man es nicht lernen mag. Ich kann daher die allzugrosse Herablassung dererjenigen nicht billigen, welche den Arithmetischen Müßiggängern zu gefallen allerhand Methoden erfunden haben, deren sie sich bedienen könnten, wenn sie zu träge sind, das Einmal eins zu lernen. Alle diese Manieren aber sind ungleich weitläuftiger, als die gewöhnliche, welche durch Hülfe des pythagorischen Rechentäfeleins sich ausrechnen läßt. Man wird dahero um so weniger von mir fordern, daß ich eine davon namhaft machen solle, weil derjenige, der das leichte und kurze Einmal eins gelernet hat, drey Exempel gerechnet haben wird, ehe der andere, der die Regel der Faulen vorziehet, nur die Zurüstung zur Berechnung eines einigen Exempels gemacht hat.

Ob man denen zu lieb, die das Einmal eins nicht lernen mögen, leichtere Hülfsmittel zu multipliciren erfinden solle und könne?

§. 36. Ich habe die pythagorische Rechentafel oder das Einmal eins öfters schon genennet, auch gezeiget, worinnen die

die Vortheile desselben bestehen; doch wird die Sache deutlicher werden, wenn ich die Tafel, oder vielmehr das Täfelein selbst hersetze. Man macht ein Quadrat, und theilet es nach der Breite und Länge in gleichviel kleinere Quadrätlein, nemlich auf jeder Seite in neun Quadrätlein, ein; schreibet sodann die einfache Zahlen von 1 bis 9 nach der Quer und Länge in die erstere Quadrätlein; hernach addirt man eine jede einfache Zahl nach der Ordnung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9mal zu sich selbst, und schreibt die Aggregata in die folgende Quadrätlein. Z. E.

Was das pythagorische Rechentäfelein seye;

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In diesem Täfelein werden alle einfache Zahlen nach der Ordnung neunmal zu sich selbst addirt. Z. E. wenn ich 6 nach der Quere oder Länge suche, so finde ich

Erklärung und Gebrauch desselben.

in den folgenden Quadrätlein die Summe von 6, zweymal, oder 3 mal, oder 4 mal, oder 5 mal u. s. w. zu sich selbst addiret. Will ich nun die Producte wissen, so darf ich nur die eine Zahl nach dem ersten Querstrich, oder nach der Breite, und die andere nach der Länge, aber im ersten Reyhen der Quadrätlein, aufsuchen, und die auf beede Zahlzeichen in geraden Linien sich beziehende Zahl suchen, welche das Product seyn wird. Z. E. wie viel ist 7 mal 4? Sieben suche ich nach der Länge, 4 nach der Breite; Alsdann schaue ich von 4 in die gerade Linie herunter, bis die Querlinie von 7 die obige Verticallinien durchschneidet. Das daselbst befindliche Quadrätlein enthält das Product 28, oder das Aggregat von 7 viermal zu sich selbst addirt. Eben so würde ich dieses Product finden, wenn ich 7 nach der Breite und 4 nach der Länge suchen wollte. Diese Rechentafel hat vor dem sonst gewöhnlicher massen vorgeschriebenen Einmal eins den Vorzug, daß man sogleich hinter sich und für sich, wie man sagt, multipliciren oder z. E. wissen kann, wie viel nicht nur 7 mal 9, sondern auch 9 mal 7 seye. Doch wollen wir jetzo das gewöhnliche Einmal Eins zum lernen auch noch hersetzen:

Wie man das Einmal eins aussprechen und lernen solle?

1 mal

1	mal	1	ist	1
2	mal	2	ist	4
2	mal	3	ist	6
2	mal	4	ist	8
2	mal	5	ist	10
2	mal	6	ist	12
2	mal	7	ist	14
2	mal	8	ist	16
2	mal	9	ist	18
2	mal	10	ist	20.
3	mal	3	ist	9
3	mal	4	ist	12
3	mal	5	ist	15
3	mal	6	ist	18
3	mal	7	ist	21
3	mal	8	ist	24
3	mal	9	ist	27
3	mal	10	ist	30.
4	mal	4	ist	16
4	mal	5	ist	20
4	mal	6	ist	24
4	mal	7	ist	28
4	mal	8	ist	32
4	mal	9	ist	36
4	mal	10	ist	40.
5	mal	5	ist	25
5	mal	6	ist	30
5	mal	7	ist	35
5	mal	8	ist	40
5	mal	9	ist	45
5	mal	10	ist	50.
6	mal	6	ist	36
6	mal	7	ist	42
6	mal	8	ist	48
6	mal	9	ist	54
6	mal	10	ist	60.
7	mal	7	ist	49
7	mal	8	ist	56
7	mal	9	ist	63
7	mal	10	ist	70.
8	mal	8	ist	64
8	mal	9	ist	72
8	mal	10	ist	80.
9	mal	9	ist	81
9	mal	10	ist	90.
10	mal	10	ist	100
10	mal	100	ist	1000
10	mal	1000	ist	10000
10	mal	10000	ist	100000
10	mal	100000	ist	1000000 oder Million.

Wie man durch Hülfe des Einmal eins wirklich multiplicire?

§. 37. Nun wird es gar keine sonderliche Kunst seyn, alle nur mögliche auch noch so grosse Zahlen zu multipliciren. Z. E. ich solle 3648 mit 436 multipliciren, das ist 6 mal, hernach 30 mal, und endlich noch 400 mal zu sich selbst addiren: folglich setze ich den Multiplicator unter die zu multiplicirende Zahl, so, daß die Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner und so weiter zu stehen kommen; hernach mache ich einen Strich, und multiplicire nach dem Einmal eins zuerst alles mit den Einheiten, ferner mit den Zehnern, endlich mit den Hundertern, und addire zuletzt die gefundene einzele Producte zusammen.

```
   3648
    436
  -----
  21888
 10944
14592
-------
1590528
```

Dann ich sage 6 mal 8 ist 48; setze also 8 Einheiten und behalte die 4 Zehner für die folgende Stelle; ferner 6 mal 4 ist 24, und 4 Zehner, die ich behalten, dazu, geben 28, das sind 8 Zehner die ich setze, und 2 Hunderter die ich für die folgende Stelle der Hunderter aufhebe; weiters 6 mal 6 ist 36 und die 2 übrig behaltene

Hun-

Hunderter dazu, machen 38 u. s. w. Wenn ich alles mit den Einheiten durchmultiplicirt habe, so multiplicire ich auch mit den Zehnern, und sage: 3 mal 8 oder 30 mal 8, denn es sind, wie ihre Stelle ausweißt, 3 Zehner, geben 24 Zehner, oder 240 Einheiten; folglich muß ich entweder unter den ersten achter in die Stellen der Einheiten eine Nulle setzen, oder darf ich dieselbe auch ganz leer lassen, wenn ich nur den vierer unter die folgende Classe setze, weil er Zehner anzeiget, folglich unmöglich unter die Einheiten gesetzt werden kann. Aus gleichem Grunde muß ich, wenn ich mit Hundertern multiplicire, das erste gefundene Zahlzeichen unter die Stelle der Hunderter setzen u. s. w. Daß endlich die partial Producte hernach besonders addirt werden müssen, ist vorhin klar: dann ich verlange nicht blos die zerschiedene partial Producte, sondern dasjenige Product zu wissen, das allen zusammengenommen gleich ist. Da ich nun durch diese Rechnung die Summe der Producte aller Einheiten, aller Zehner, aller Hunderter u. s. w. in die zu multiplicirende Zahl bekomme; so siehet man leicht, daß nach der vorgeschriebenen Methode alle mögliche Zahlen multiplicirt werden können. Und das ist der Beweis von der Multiplication.

Warum man, wenn mit mehrern Zahlen multiplicirt wird, das eine partial Product allemal um eine Stelle vor sich rücken müsse.

Warum die partial Producte besonders wieder addirt werden?

Beweis von der Multiplication in unbenannten Zahlen.

§. 38. Bey der Multiplication kommen keine besondere Fälle wegen den Nullen vor. Dann wie die Nullen, als welche blos die Plätze ausfüllen, und den Rang der Zahlzeichen bestimmen helfen, in der Addition nichts vermehren, so vermehren sie auch nichts in der Multiplication: man sagt dahero ganz recht, Nulle mal Nullen ist Nullen, zweymal Nullen ist Nullen u. s. w. Weil sie aber nichts desto weniger den Rang der Zahlzeichen wirklich nach der Decimalprogression vergrössern, so darf man sie auch hier nicht gänzlich aus der Acht lassen. Wann ich z. E. 423. mit 100 multiplicire, so setze ich:

Wie man die Nullen in der Multiplication behandle;

```
  423
  100
  ---
  000
 000
423
-----
42300
```

und sage, weil keine Zahlzeichen in der Stelle der Einheiten sich befinden, Nulle mal 3 ist Nulle, o mal 2 ist o, o mal 4 ist o; ferner, weil keine Zahlzeichen in der Stelle der Zehner stehen, abermal Nulle mal 3 ist Nulle, o mal 2 ist o, o mal 4 ist o; fange aber unter der Stelle der Zehner an §. 37. Endlich weil ein Hunderter da ist, so fange ich zuletzt in der Stelle der Hunderter zu schreiben an, und sage

Erster Fall, wenn am Ende einige Nullen angehängt sind; sie mögen hernach dem

sage 1 mal 3 ist 3, 1 mal 2 ist 2, 1 mal 4 ist 4; die partial Producte addire ich zusammen, und bekomme die Zahl 42300. Aus diesem Exempel ist klar, daß man einer Zahl, die mit 10, 100, 1000. u. s. w. multiplicirt wird, nur so viel Nullen anhängen darf, als der Multiplicator Nullen enthält. Wenn ich also 34 mit 1000 multiplicire, so ist das Product 34000. Sollte ich aber 34 mit 2000 multipliciren, so multiplicire ich nur mit 2 und hänge dem Product die 3 Nullen noch an, z. E. 8000 ist das Product von 4. 2000. Eben so geht es wenn ich 2000 mit 34 multiplicire; indeme ich abermal nur den Zweyer mit 34 multipliciren und hernach dem Product die 3 Nullen anhängen darf.

Multiplicator oder der zu multiplicirenden Zahl angehängt seyn.

Sollten aber mitten in der Zahl Nullen seyn, so verfahre ich nach der allgemeinen Regel; oder wenn die Nullen im Multiplicator stehen, so rücke ich nur das erste Zahlzeichen nach der Nulle um zwo Stellen u. s. w. zumal fort: Z. E.

Zweyter Fall, wenn in der Mitte Nullen stehen; und zwar erstlich in der zu multiplicirenden Zahl.

```
 3004
   23
 ----
 9012
6008
-----
69092
```

3 mal 4 ist 12, das sind 2 Einheiten und ein Zehner für die folgende Stelle; ferner 3 mal 0 ist 0, und ein Zehner von

dem

dem vorhergehenden Product, giebt 1 in die Stelle der Zehner; weiters 3 mal 0 ist 0, welche ich in die Stelle der Hunderter setze u. s. w. Stehen aber die Nullen im Multiplicator, so rücke ich das Product um 2, 3, oder mehr Stellen, je nachdem es viel oder wenig Nullen sind, zumal fort. Z. E.

ferner in dem Multiplicator, oder wenn der Multiplicator zwischen den ersten und letzten Zahlzeichen Nullen hat.

```
    34086
     2006
   ------
   204516
 68172
 --------
 68376516
```

Dann 6 mal 6 ist 36, das ist, 6 Einheiten und 3 Zehner für die folgende Stelle; 6 mal 8 ist 48 und 3 Zehner, die übrig behalten sind, dazu, geben 51, das ist, ein Zehner und 5 Hunderter; den Zehner setze ich und die 5 Hunderter kommen in die folgende Stelle; 6 mal 0 ist 0, und 5 Hunderter dazu, geben 5 Hunderter, die in die Stelle der Hunderter kommen u. s. w. Hernach sollte ich mit Zehnern alles durchmultipliciren: weil aber der Multiplicator in der Stelle der Zehner eine Nulle hat, so rücke ich in die Stelle der Hunderter mein nächstes Zahlzeichen fort; weil aber der Multiplicator auch in dieser Stelle eine Nulle hat, so wird das nächste Zahlzeichen in die Stelle der Tausender geschrieben: dann ich multiplicire hernach mit 2 Tausendern; und sage 2 mal 6 sind

Beweis und Probe von den bey den Nullen gege=

6 sind 12 Tausender; folglich muß der Zweyer in die Stelle der Tausender zu stehen kommen. Sollte einer die Sache noch nicht begreiffen, so darf er nur nach der allgemeinen Regel multipliciren; in welchem Fall er leicht finden wird, daß er sich ohne Noth doppelte und dreyfache Mühe mache, wenn er die gegebene Regel nicht befolget. Z. E.

benen Regeln.

```
   34086
    2006
--------
  204516
 000000
000000
68172
--------
68376516
```

Hier kommt das obige Product wieder heraus; und der Unterscheid bestehet nur darinnen, daß sich der Rechner unnöthige Mühe mit den Nullen machen, und bey dem zweyten und dritten Partialproduct sagen mußte: 0 mal 6 ist 0, 0 mal 8 ist 0, 0 mal 0 ist 0, 0 mal 4 ist 0, u. s. w.

§. 39. Aus dem bisherigen erhellet, daß man mit Nullen und mit eins multipliciren könne. Was aber mit Nullen multiplicirt wird, das wird zu Nullen. Viermal Nullen ist Nullen, und viermal Nichts ist Nichts, heißt also gleich viel. So leicht diese Anmerkung ist, so nöthig will es seyn, daß man sie mit Fleiß behal-

Einige allgemeine Sätze werden aus den bisherigen gefolgert.

Eine wirkliche Grösse durch Nullen multiplicirt wird Nulle.

halte, und wisse, daß eine wirkliche Grösse mit Nichts oder mit Nullen multiplicirt zu Nichts werde. In der Differentialrechnung werde ich den Nutzen davon zeigen, und beweisen, was für wichtige Fehler durch Beobachtung dieser Kleinigkeiten vermieden werden können. Alle Welt weiß es, daß einer, wenn er viermal nichts hat, so viel habe, als wenn er einmal nichts oder überhaupt nichts habe. Und doch ist dieser so gemeine und bekannte Satz eben so wichtig, als fruchtbar der folgende Grundsatz ist: daß einmal Eins Eins seye; oder daß eine Zahl, durch eins multiplicirt, weder vermehrt noch vermindert werde, sondern sich selbst vollkommen gleich bleibe. Z. E. einmal sechs ist gleich sechsen; oder 1.6=6. und 1. 3=3. u. s. w. Den Nutzen von diesem so gemeinen und jedermann verständlichen Satz wollen wir gleich im nächsten Capitel bey den Verhältnissen und Brüchen zeigen; indeme sich die meiste Demonstrationen der daselbst vorzutragenden fruchtbaren Lehre von den Verhältnissen blos darauf gründen, und dadurch faßlich gemacht werden können. Man siehet hieraus, daß die gemeinste Wahrheiten die fruchtbarsten seyen, und daß man ja nichts als eine Kleinigkeit ansehen oder verachten solle, man habe dann zuvor bewiesen, daß es eine wirkliche Kleinigkeit seye,

Nutzen dieses Satzes.

Eine wirkliche Grösse durch Eins multiplicirt, wird nicht vermehrt noch vermindert; oder Einmal Eins ist Eins:

Nutzen dieses Satzes;

Wie und warum die gemeinste Wahrheiten die fruchtbarsten seyen; und warum man die Klei-

seye, und weder im gemeinen Leben noch in dem Reich der Wissenschaften irgend eine nützliche Folge haben könne.

nigkeiten nicht verachten solle?

§. 40. Wenn wir die Art zu multipliciren noch einmal betrachten, so finden wir, daß das Product die eine von den gegebenen Zahlen so oft in sich enthalte, als die andere von den gegebenen Zahlen Einheiten in sich begreifft. In kleinen Exempeln erhellet dieses ganz deutlich. Dann wenn ich 3 mit 2 multiplicire, so kommt 6 heraus. Dieses Product 6 enthält den einen Factor 3 so oft, als der andere Factor 2 eins in sich begreifft: dann 3 ist in 6 zweymal, und eines ist in 2 auch zweymal enthalten. Wenn wir also schon dividiren könnten, so dürften wir nur das Product mit einem von den gegebenen Factoren dividiren; so würde der Quotient der andere Factor seyn, woferne wir in der Rechnung nicht gefehlt hätten: und das wäre die Probe der Multiplication. Weil wir aber die Regeln der Division noch nicht vorgetragen haben, so müssen wir diese Probe noch so lange aufschieben, bis wir deutlich wissen, was dividiren seye. Inzwischen hat Hr. Baron von Wolf die obige Eigenschaft des Products in Rucksicht auf seine Factores zur Definition der Multiplication gemacht. Da aber die Nominaldefinitionen willkührlich sind, weil eine je-

Worinnen die Probe der Multiplication bestehe;

und warum man sie noch nicht vortragen könne?

Auf was man bey der will-

führlichen logischen Erklärung in einem Vortrag hauptsächlich zu sehen habe.

de Eigenschaft, die der Sache allein zukommt, für eine Erklärung derselben angesehen werden kann, auch ein jedes Ding verschiedene Eigenschaften von solcher Gattung haben kann; so darf man allemal diejenige wählen, die einem zu seinem Zweck am dienlichsten, für die Leser und Zuhörer aber am faßlichsten und so beschaffen zu seyn scheinet, daß alles übrige, was von der Sache gesagt werden solle, auf eine ungezwungene und leichte Art daraus hergeleitet werden kann.

Von der Multiplication in genannten Zahlen.

§. 41. Die Multiplication kann auch, wie die Addition und Subtraction, in genannten Zahlen geschehen. Weil sich aber Gulden mit Kreuzern, u. s. w. wenn man die Gulden nicht vorher zu Kreutzern gemacht hat, nicht wohl multipliciren lassen; so siehet man schon, daß man in diesem Fall alles unter einerley Benennung bringen müsse. Wiewohlen wir an seinem Ort, besonders in der Geometrie, zeigen werden, daß man dieser Reduction durch einige andere Vortheile könne überhoben werden, und z. E. 3 Schuhe 4 Zoll mit 5 Schuhen 6 Zoll multipliciren dürfe, ohne daß man nöthig hätte, die Schuhe in Zolle zu verwandeln. Dergleichen Regeln der Fertigkeit werden wir nur bey solchen Fällen melden, welche von selbst eine Gelegenheit dazu geben, weil es eigentlich unsre Absicht nicht ist, das prak-

tische

tische in der Arithmetik und Geometrie besonders abzuhandeln. Uebrigens ist das Multipliciren in genannten Zahlen nicht schwer. Wenn man 2 fl. 6 kr. mit 4 kr. multipliciren solle, so macht man die Gulden zu Kreuzern; und addiret die noch dazu gehörige Kreuzer, die Summe wird hernach auf die gewöhnliche Weise multiplicirt. Z. E. 2 fl. machen 120 kr. und 6 kr. dazu, geben 126. Diese multiplicire ich mit 4. Das Product giebt 504 kr. welche ich hernach durch die Division mit 60 wiederum in Gulden verwandele, und was übrig bleibt, in die Classe der Kreuzer besonder setze.

Wie man in der Buchstabenrechnung multiplicire?

§. 42. Es ist noch übrig, daß wir auch die Multiplication in der Buchstabenrechnung zeigen. Buchstaben werden miteinander ohne das Einmaleins, durch bloses Zusammensetzen multiplicirt. Wenn ich a mit b multipliciren solle, so setze ich a und b zusammen, und sage, das Product ist ab. Eben so ist von a in b und c das Product abc oder bac, oder bca u. s. w.

Warum es gleichgültig seye, welche Buchstaben in der Multiplication zu erst oder zu letzt stehen.

Dann es gilt gleichviel, wo die Buchstaben stehen, und welcher von ihnen der erste oder der letzte seyn soll. Man könnte auch bey den Zahlzeichen diese Weise zu multipliciren einführen, nur mit dem Unterscheid, daß die Factores durch Punkte, als die Zeichen der Multiplication, miteinander müßten verbunden werden:

weil sie sonsten, wenn sie blos zusammengesetzt würden, eine andere Bedeutung hätten. Z. E. 6 solle mit 5 multiplicirt werden. Wenn einer nicht wirklich multipliciren mag oder kann, so darf er nur setzen 6. 5, oder 5. 6, oder 6 x 5. Das Product von 32 in 245 ist 32. 245; und wenn man es noch einmal mit 15 multipliciren sollte, so heißt es 32. 245. 15. Dieser Methode bedient man sich in mathematischen Schriften nicht selten, besonders wenn man nur die Formeln anzeigt, wie etwas berechnet werden solle; da man dann die wirkliche Arbeit den gemeinen Rechenmeistern vollends überläßt.

Wie man auch die Zahlzeichen nach der Buchstabenrechnungs-Methode multipliciren könne?

§. 43. So leicht nun die erste Hauptregel in der Buchstabenrechnung ist, so giebt es doch auch besondere Fälle, welche man in der Ausübung beobachten muß. Dann es können erstlich Zahlen bey den Buchstaben stehen, hernach giebt es die schon benamßte Fälle, da man nicht immer plus mit plus, sondern auch plus mit minus, und minus mit minus multiplicirt. Wenn die Buchstaben Zahlzeichen vor sich haben, so multiplicirt man gemeiniglich die Zahlzeichen nach der gewöhnlichen Regel, und setzet sodann das Buchstaben-Product selbst ihnen unmittelbar nach Z. E. 3a multiplicirt mit 4b giebt 12ab, 5x multiplicirt mit 2ab giebt 10abx. u. s. w.

Was man für besondere Fälle bey dieser Buchstaben-Multiplication zu beobachten habe.

Wie man multiplicire, wenn die Buchstaben Zahlzeichen vor sich haben.

u. s. w. Sind aber die Zahlen groß, daß man sie nicht sogleich im Kopf ausrechnen kann; so verbindet man sie durch das Multiplicationszeichen. Z. E. $204x$ multiplicirt mit $54ab$ giebt im Product $(54.204)abx$. Diese Fälle sind leicht; es giebt aber noch schwerere, welche jetzo folgen.

Wie man plus mit minus multiplicire?

§. 44. Wenn man plus mit plus multiplicirt, so begreifft man aus dem bisherigen leicht, daß das Product auch plus oder positiv seyn muß. Multiplicirt man aber plus mit minus, und minus mit minus; so muß man die Regeln für das Zeichen des Products erst suchen. Wir wollen zuerst sehen, was heraus komme, wenn man plus mit minus, oder welches gleich viel ist, minus mit plus multiplicire. Es sey gegeben $a - b$, das solle mit c multiplicirt werden. Das a und das c hat kein Zeichen, folglich ist a und c plus. Denn eine jede Grösse, die zu Anfang stehet, und kein Zeichen vor sich hat, ist eben deswegen positiv. Diß gehört zwar noch zur mathematischen Sprache; doch findet es auch hier seinen rechten Platz. Die Mathematikverständigen haben diese Regel unter sich festgestellt: daß sie einer positiven Grösse zu Anfang einer Reyhe von Grössen kein Zeichen vorsetzen wollen; vermuthlich deswegen, damit die Zeichen nicht gar zu oft vorkommen und allzuviel Platz einnehmen. Wenn also der erste

Warum eine jede Grösse zu Anfang gesetzt, wenn sie kein Zeichen vor sich hat, plus seye.

Buchstabe in einer Rechnung kein Zeichen hat, so ist er allemal positiv, und man darf im Sinne das Zeichen plus hinzu denken. Um nun wieder auf das Exempel $a-b$ multiplicirt mit c zu kommen, so sehen wir sogleich, daß man das a nicht ganz, sondern nur das um ein b verminderte a mit c multipliciren solle. Wenn wir also a mit c multipliciren, und das Product ac setzen, so haben wir es um c zuviel multiplicirt: folglich begreifft man schon, daß man von diesem Product etwas abziehen müsse; und zwar weil ich b auch mit c multipliciren solle, gerade das Product bc. Dieses wird also negativ werden. Wenn also plus mit minus multiplicirt wird, so bekommt das Product das Zeichen minus oder wird negativ. Das Product von $a-b$ in c ist also $ac-bc$. Sollte jemand daran zweifeln, so darf er nur die Probe mit Zahlen machen, und z. E. für a setzen einen Sechser, für b einen Zweyer, und für c einen Dreyer so wird er haben $6-2$ multiplicirt mit 3. Das ist nach unserer Regel $6.3-3.2=18-6=12$. Welcher Ausdruck ganz richtig ist, und mit der gemeinen Art zu multipliciren übereinkommt. Dann 6 weniger 2 ist 4, und 4 mit 3 multiplicirt giebt 12.

Was heraus komme, wenn man plus mit minus multiplicire?

Exempel und Beweis, daß minus mit plus minus gebe.

§. 45. Wir wollen aber von dieser Regel noch einen Beweis geben, welcher

uns

uns zugleich zeigen wird, was minus mit minus multiplicirt für ein Product habe. Nur müssen wir unsern Lesern vorläufig noch sagen, wie ein regulaires Viereck ausgemessen werde, weil sich der Beweis auf diese geometrische Aufgabe gründet. In der ersten Tafel der geometrischen Figuren, Fig. I. stehet ein regulaires Viereck. Man mißt seine Fläche, wenn man die Höhe AB oder Ae mit der Breite AD oder Ai multiplicirt. Nun wollen wir die Höhe Ae des grössern Vierecks aus dem Buchstaben a und seine Breite Ai mit dem Buchstaben c bezeichnen. In diesem Viereck stehen oben und auf der Seite noch zwey kleinere Vierecke; das eine heißt Begh, dann so ließt und spricht man nach dem an den vier Ecken geschriebenen Buchstaben ein Viereck aus. Seine Höhe ist Be, welche wir b nennen wollen, und die Breite ist Bh=Ai; also die vorige, die c heißt. Folglich wird das Maas dieses kleinern Vierecks bc seyn. An der Seite stehet noch eines, welches DiCh heißt, und zur Breite Di hat; welche wir mit dem Buchstaben d ausdrucken; die Höhe ist die vorige, weil ig gleich Ae ist, folglich wiederum a. Dieses Viereck wird also, wenn man nemlich die Höhe mit der Breite multiplicirt, zu seinem Maasse ad haben. Endlich bleibt noch ein Viereck übrig, welches ABCD heißt, und von den beeden

Was heraus komme, wenn man minus mit minus multiplicire?

Exempel und Beweis, daß minus mit minus plus gebe.

den kleinern Vierecken gleichsam eingefasset ist. Dieses wollen wir nun ausmessen. Die Höhe AB ist Ae — eB = a — b, die Länge ist Ai — Di = c — d. Folglich wird sein Innhalt seyn (a — b). (c — d). Nun wollen wir wirklich multipliciren; weil wir schon wissen, was heraus kommen muß, folglich uns im Multipliciren helfen und lernen können, was minus mit minus gebe. Es seye also

$$\begin{array}{l} a - b \\ c - d \\ \hline ac - cb - ad + bd \end{array}$$

Weil alle Buchstaben in einander multiplicirt werden, so findet sich in der Multiplication selbst keine Schwürigkeit, §. 42. aber die Zeichen wissen wir noch nicht alle recht zu setzen. *ac* muß plus haben, dann plus mit plus giebt plus. *cb* und *ad* müssen minus haben, dann plus mit minus giebt minus. §. 44. Was aber *bd* haben müsse, lernen wir aus der Figur. *bd* ist das kleine Viereck *Cbgf*. Wenn ich nun von dem grossen *ac*, oder *Aegi*, abziehe *cb* und *ad*, oder *Begh* und *Digf*, so ziehe ich wirklich, und zwar gerade das kleine Viereck *Cbgf* oder *bd* zu viel ab: demnach muß ich es wiederum addiren, oder mit dem Zeichen plus bemerken. Folglich weiß ich jetzo schon, was *bd* für ein

Zei-

Zeichen haben müßte, und das Exempel wird also heissen:

$$ac - cb - ad + bd.$$

Hieraus mache ich den Schluß, daß minus mit minus multiplicirt plus gebe.

§. 46. Wer diesen geometrischen Lehrsatz noch nicht recht verstehet, der kann den obigen Beweis, wenn er die Geometrie durchgelesen hat, noch einmal nachholen, und inzwischen sich durch folgenden Gedanken die Sache einiger massen begreifflich machen. Das minus oder negative muß man sich als eine Schuld vorstellen. Wenn einer demnach — 10 fl. mit — 1 multipliciren soll, so ist es eben so viel, als wenn er 10 fl. Schulden einmal nicht heimgeben oder bezahlen dürfte. Nach geschehener Multiplication mit — 1 wird er also wirklich um 10 fl. reicher seyn. Sollte er 10 fl. doppelt oder dreyfach, das ist an mehrere Oerter hin schuldig seyn, und man sagte ihm, er darf diese zwey- oder dreymal wieder nicht bezahlen, so würde er abermal um so viel reicher werden. Demnach giebt — 10 fl. multiplicirt mit — 2. das Product + 20 fl. Das ist, 10 fl. Schulden, die man 2 mal nicht bezahlen darf, oder die einem 2 mal geschenkt werden, machen einen wirklich um 20 fl. reicher u. s. w. Nun glaube ich die Sache faßlich genug vorgetragen zu haben.

Andere und leichtere Art zu zeigen, daß minus mit minus plus gebe.

hen. Ich will daher alles, was zur Multiplication in der Buchstabenrechnung gehört, in eine kurze Regel zusammen ziehen. **Man multiplicirt alle Buchstaben der ersten Reyhe mit allen Buchstaben des Multiplicators, giebt denen, die einerley Zeichen haben, im Product das Zeichen plus, denen aber, die verschiedene Zeichen haben, das Zeichen minus, und addirt endlich die Partialproducte nach den Additionsregeln zusammen.** Das ist alles, was von der Multiplication gesagt werden kann. Vorzüglich muß man die kurze Regel behalten: **Einerley Zeichen geben plus; verschiedene minus** (Eadem signa dant plus, diversa minus.) Das ist, plus mit plus, oder minus mit minus multiplicirt, giebt im Product plus: dann plus mit plus, und minus mit minus sind ja einerley Zeichen. Hingegen plus mit minus multiplicirt giebt minus: denn plus und minus sind zerschiedene Zeichen. Diese Regel wird auch bey der Division der Buchstaben zu Grunde gelegt, und ist eine von denenjenigen, welche ihren wahren Nutzen haben. In andern Fällen, wo man aus einem Exempel viele Particularregeln herauszuziehen bemühet ist, bin ich nicht der Meynung, daß man sich den Kopf damit anfüllen solle: dann sie werden nur wieder vergessen, weil sie eines theils zu zahlreich, andern theils

Nutzbarkeit der bey der Multiplication vorkommenden zwo kurzen Hauptregeln: nemlich einerley Zeichen geben plus, zerschiedene aber minus.

In welchen Fällen es gut seye, Regeln zu geben; und in welchen Fällen man selbiger überhoben seyn könne.

theils nur particular sind. Hingegen je wichtiger, fruchtbarer, allgemeiner, kürzer, einfacher, natürlicher und faßlicher eine Regel ist; desto leichter druckt sie sich dem Gemüthe ein, und destoweniger Mühe braucht man, sie zu behalten. Wir werden bey allen vorkommenden Gelegenheiten solche Regeln anpreisen, die übrigen aber mit Vorbedacht theils übergehen, theils zeigen, daß man sich ohne Noth damit aufhalte. Ich will jetzo noch ein Exempel von der Multiplication geben. Man solle multipliciren

Exempel der Buchstaben-Multiplication, wo alle Fälle vorkommen.

$$
\begin{array}{l}
\quad a - b + c \\
\text{mit } a + b - c \\
\hline
aa - ab + ac \\
\quad + ab - bb + bc \\
\quad\quad - ac + bc - cc \\
\hline
aa - bb + 2bc - cc
\end{array}
$$

Summe der Partialproducte.

Dann a mit a gibt aa, a mit $-b$ giebt $-ab$, a mit $+c$ giebt $+ac$; $+b$ mit $+a$ giebt $+ab$, $+b$ mit $-b$ giebt $-bb$, $+b$ mit $+c$ giebt $+bc$; $-c$ mit $+a$ giebt $-ac$, $-c$ mit $-b$ giebt $+bc$, $-c$ mit $+c$ giebt $-cc$. In der Summe heben sich $+ab$ und $-ab$ gegeneinander auf, wie auch $+ac$ und $-ac$. Also bleibt die Summe aller Producte zusammen gezehlt $aa - bb + 2bc - cc$.

§. 46.

Wie man die Producte derjenigen Buchstaben, die mit sich selbst multiplicirt werden, schreibe und ausspreche.

§. 47. Nun ist noch übrig, daß wir auch zeigen, wie man die Producte schreibet und ausspricht, wenn ein Buchstabe mit sich selbst etlichmal multiplicirt wird: Z. E. wenn ich a mit a multiplicire, so kann ich schreiben aa; und wenn ich dieses Product noch einmal multiplicire, so heißt es nach der allgemeinen Regel aaa. Allein die Mathematik hat hier einen kürzern Ausdruck erfunden; indeme sie statt aa setzet a^2, statt aaa, aber a^3 u. s. w. So vielmal nemlich ein Buchstab mit sich selbst multiplicirt wird, so viel Einheiten muß das von hinten, und zwar etwas oberhalb, angehängte Zahlzeichen, in sich begreiffen. Es ist also ein grosser Unterschied zwischen $3a$ und a^3, jenes heißt überhaupt 3 mal a, dieses aber a mal a mal a. Wie z. E 3.10 oder 3 mal 10 nur 30 ist, hingegen 10^3 oder 10 mal 10 mal 10 die Zahl 1000 ausmacht. Man spricht den Ausdruck a^3 aus: a drey; oder auch, a in der dritten Dignität oder Potenz; wie wir sogleich hören werden. Wenn man also a viermal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product a^4; und wenn man es m mal mit sich selbst multiplicirt, so heißt es a^m, in welchem Falle m bedeuten kann, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, u. s. w. folglich ein allgemeiner Ausdruck ist.

§. 48. Diese Lehre ist besonders wichtig, und breitet ihren Nutzen durch die gan=

ganze Algebra und höhere Geometrie aus. Wir wollen dahero nicht nur die hier vorkommende Namen und Zeichen, sondern auch die Multiplication dieser Potenzen unter und miteinander selbst erklären. Grössen, in so ferne sie mit sich selbst multiplicirt werden, heissen Dignitäten oder Potenzen; je öfter sie nun mit sich selbst multiplicirt werden, desto grösser werden die Dignitäten. Z. E. a mit a multiplicirt giebt aa, oder a^2, folglich ist a in der zweyten Dignität; a^3 ist die dritte Dignität von a, a^4 die vierte Dignität u. s. w. Hieraus siehet man, daß a für sich allein, wenn es gar nicht multiplicirt wird, in seiner ersten Dignität stehe, und folglich geschrieben werden könne a^1: demnach werden die Dignitäten in richtiger Ordnung der gewöhnlichen Zahlzeichen aufsteigen; z. E.

Was Potenzen oder Dignitäten seyen,

warum und wie ferne auch ein nicht multiplicirter oder einfacher Buchstabe und Grösse eine Dignität heissen könne;

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 \text{ u. s. w.}$$

Progression der Dignitäten oder Potenzen.

Die Zahlen, die hinter den Buchstaben stehen, heissen **Exponenten**: also ist 2 der Exponent von a in der andern Dignität; 7 ist der Exponent von a in der siebenden Dignität. Und bey dem Ausdruck $(a+b)^3$ ist 3 der Exponent von $(a+b)$ in der dritten Dignität. Denn man kann auch ganze Summen mit sich selbst multipliciren, in welchem Fall die Summe nur in ( ) eingeschlossen, und hinter das Zeichen oberhalb

Was die Exponenten seyen;

Vorzug dieser erfundenen Namen.

halb der Exponent gesetzet wird. Diese Namen der Dignitäten und Potenzen, die Keppler und Cartesius ausgefunden, sind viel natürlicher, als wenn man nach der Mode der Alten immer Zensus, Zensicensus, Zensicubus, Zensisurdesolidus u. s. w. sagt. In der Geometrie heißt die zweyte Dignität Quadrat, die dritte Cubus; was aber weiter hinaus gehet, behält die von uns schon erklärte Namen bey. Den Grund von dem Namen des Quadrats und des Cubus wollen wir zu seiner Zeit erklären und anführen.

Wie man die Dignitäten oder Potenzen mit einander multiplicire.

§. 49. Nachdeme wir die hier vorkommende Namen erkläret haben, müssen wir auch zeigen, wie man die Dignitäten mit einander multiplicirt. Z. E. ich solle a^3 mit a^2 multipliciren. Die Sache ist leicht, wenn ich die allgemeine Regel der Multiplication §. 42. hier anwende. Damit wir aber deutlicher davon überzeugt werden, so wollen wir a^3 und a^2 nach der angeführten Regel schreiben und sagen, aaa solle mit aa multiplicirt werden. Nun werden die Buchstaben nur zusammengesetzt §. 42. folglich wird das Product seyn $aaaaa$; das ist, nach einem kurzen Ausdruck a^5. Ferner ich solle a^1 mit a^2, oder a mit aa, multipliciren, so habe ich aaa, das ist, a^3; ich solle a^4 mit a^5, das ist $aaaa$ mit $aaaaa$, multipliciren,

so ist das Product *aaaaaaaaa*, oder a^9. Da nun $a^2 . a^3 = a^5$, $a^1 . a^2 = a^3$, $a^4 . a^5 = a^9$, so kann ich eine leichte Regel aus diesen Exempeln nicht nur, sondern aus der Natur der Multiplication in Buchstaben §. 42. herausziehen, und ohne noch was von den Logarithmen zu wissen, aus sichern Gründen sagen: **man multiplicirt die Dignitäten von einerley Benennung, wenn man ihre Exponenten zusammen addirt.** Es müssen aber Dignitäten von einerley Benennung oder von einerley Buchstaben seyn: z. E. $a^3 . a^7$ wird a^{10} ausmachen. Hingegen x^3 multiplicirt mit y^2 ist eben x^3y^2, weil ich hie zweyerley Buchstaben habe; und also die Exponenten weder des x noch des y zusammensetzen kann. Dann wann ich die allgemeine Regel zu Rath ziehe, so finde ich, daß ich *xxx* mit *yy* multipliciren solle; diß giebt nun ein Product $= xxxyy$ oder x^3y^2. Wenn ich aber x^3 mit x^2 multiplicire, so ist das Product x^5, und wenn ich y^3 mit y^2 multiplicire, so habe ich y^5. Diese Regel muß man sich wohl bekannt machen, wenn man in dem folgenden fortkommen will. Sie heißt nochmalen also: Dignitäten von einerley Benennung werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt, und die Summe davon der einfachen Dignität von hinten anhängt. Z. E. $b^3 . b^6 = b^9$, $c^4 . c^{10} = c^{14}$.

Auflösung und Beweis.

Die Multiplication der Potenzen wird in eine Addition ihrer Exponenten verwandelt.

Warum die Potenzen in diesem Fall einerley Benennung haben.

Weitere Anwendung der gegebenen Regel;

c¹⁴. Gesetzt aber ich sollte a^m multipliciren mit a^n, wenn nemlich der Exponent eine unbestimmte allgemeine Grösse ist; was ist alsdann zu thun? Hier bleibe ich wieder bey meiner Regel, und sage das Product wird seyn: a^{m+n}. Ich addire nemlich die 2 Exponenten zusammen, und setze sie dem Buchstaben oberhalb nach, wie ich die Zahlen gesetzt habe. Ferner: wenn ich x^m mit x^n und noch einmal mit x^r multipliciren soll, so wird das Product seyn x^{m+n+r}. Eben so ist y^m multiplicirt mit y^3 im Product y^{m+3}. Aus diesen Exempeln siehet man, daß eine allgemeine Regel auch solche Fälle bestimme, die der Einbildungskraft nicht so klar vorgestellt werden können, wie z. E. es in der vorhabenden Materie bey den Zahlen geschehen ist, welche wir alle auf die allgemeine Regel §. 42. reducirt haben.

ihre grosse Nutzbarkeit.

§. 50. Wie man die Dignitäten mit einander multipliciren kann, so läßt sich auch eine Dignität zu einer höhern durch die Multiplication erheben. Z. E. ich kann nicht nur x mit sich selbst multipliciren, und durch die Multiplication zur zweyten Dignität xx oder x^2 erheben; sondern auch xx selbst wiederum 2, 3, oder mehrmalen mit sich multipliciren, und also zur zweyten, dritten Dignität u. s. w. erheben. Wenn ich xx dreymal mit sich selbst multiplicire, so habe ich $xxxxxx$,

Wie man eine gegebene Potenz zu einer höhern erheben solle;

oder

oder x^6; wenn ich a^3 zweymal mit sich selbst multiplicire, so habe ich $aaaaaa$, oder a^6, welches die zweyte Dignität von a^3 ist, die sechste aber von a^1. Hieraus läßt sich abermal eine Regel lesen, welche die folgende ist: gegebene Dignitäten werden zu höhern erhoben, wenn man ihre Exponenten mit einander multiplicirt. Z. E. ich solle a^3 in die 4te Dignität erheben, so darf ich nur den Exponenten 3 mit dem gegebenen Exponenten 4 multipliciren, da ich dann a^{12} habe. Denn wenn ich a^3 viermal mit sich selbst multiplicire, so habe ich gerade a^{12}. Folglich wenn ich a^m zur Dignität ^{r} erheben solle; so wird die neue Dignität nothwendig heissen a^{mr}; eben so ist x^2 zur Dignität ^{m} erhoben $= x^{2m}$ und y^m zur Dignität ^{3} erhoben $= y^{3m}$. Auch diese Regel ist, wie die vorige, von besonderm Gewichte. Beede werden bey der Division wieder vorkommen, da sich dann schon der Anfang ihrer Nutzbarkeit zeigen wird.

Auflösung und Beweis: geschiehet nemlich durch die Multiplication der Exponenten.

weitere Anwendung und Nutzbarkeit dieser Regel.

§. 51. Dividiren heißt eine Zahl von einer andern gegebenen Zahl etlichmal abziehen, oder eine gegebene Zahl etlichmal kleiner machen. Z. E. ich solle 6 durch 2 dividiren; so muß ich 2 von 6 so oft abziehen als ich kann, und hernach besonders merken, wie oft ich die Zahl 2 von 6 abgezogen habe. Ich kann sie nemlich 3

Was dividiren heisse.

und wie sie nur in einer Kunst, gewisse gegebene Zahlen schneller, als sonsten, zu subtrahiren, bestehe.

mal abziehen: dann 2 von 6 läßt vier, 2 von 4 läßt 2, 2 von 2 läßt nichts. Diese Arbeit wäre in grossen Exempeln allzu mühsam: man hat dahero eine Kunst schneller zu dividiren erfunden, davon ich sogleich reden werde, wenn ich vorher gezeigt, daß sich auch die andere Erklärung der Division hieher schicke. Ich solle die Zahl 6 etlichmal kleiner machen. Nun wird mir eine Zahl gegeben, welche anzeigt, wie vielmal kleiner sie werden solle, z. E. 2mal. Wenn ich nun sagen kann, wie die Zahl heisse, welche 2 mal kleiner als 6 seye, so habe ich 6 durch 2 dividirt. Im gegenwärtigen Fall ist es die Zahl drey. Man merke hier den Unterschied zwischen der Redensart **um wie viel**, und **um wie vielmal**. In der Subtraction finde ich, um wie viel eine Grösse kleiner worden seye; so ist z. E. 6, wenn es um 2 kleiner wird, 4: in der Division hingegen merke ich, um wie viel **mal** etwas kleiner werde. Hieraus siehet man auch zugleich, daß die gefundene Zahl in der gegebenen grössern so oft enthalten seyn müsse, als in der gegebenen kleinern Eines enthalten ist. Dann die gefundene Zahl 3 ist in 6 zweymal, und eins in 2 auch zweymal enthalten. Die Haupt-Namen, die man bey der Division braucht, sind die zu dividirende Zahl, oder der numerus dividendus, der Divisor, und

der

der Quotient. Was die zu dividirende Zahl seye, ist vorhin klar. Der Divisor ist die Zahl, welche anzeigt: wie vielmal eine gegebene Zahl kleiner gemacht werden solle. Der Quotient ist die Zahl, welche durch diese etlichmalige Verminderung gefunden wird und heraus kommt, oder welche so vielmal kleiner ist als die zu dividirende Zahl, um so vielmal eins kleiner ist als der Divisor; das ist, welche in der zu dividirenden Zahl so oft enthalten, als eins in dem Divisore. Die Rede ist hier von ganzen Zahlen, wie auch bey der Multiplication nur ganze Zahlen vorkommen. Von gebrochenen Zahlen werden wir im nächsten Capitel reden.

Erklärung der bey der Division vorkommenden Namen des Divisors, des Quotienten u. s. w.

§. 52. Nun können wir schon zeigen, wie die wirkliche Division geschehe. Man setzet den Divisor unter die zu dividirende Zahl, und zwar zur Linken, oder unter die erste und am meisten bedeutende Zahlzeichen zuerst, doch so, daß, wenn das erste Zahlzeichen des Divisors grösser ist als das erste Zahlzeichen der zu dividirenden Zahl, der Divisor um eine Stelle hinter sich geruckt werde. Hernach sucht man durch das Einmal eins, wie oft der Divisor in den gerade oben geschriebenen Zahlen ungefähr enthalten seye, und schreibt die gefundene Zahl hinter einen nach der Stelle der Einheiten gezogenen Strich; wenn sie nun mit dem Divisor

Wie die wirkliche Division geschehe.

multiplicirt nicht grösser wird, als die unmittelbar obenstehende Zahlen, so ist sie der rechte Quotient. Das Product des Quotienten in den Divisor wird von den sich darauf beziehenden obern Zahlen subtrahirt, und sodann der Rest von neuem nach eben dieser Regel dividirt, bis man auf die letzte Classe der Einheiten kommt. Dieses kann nun auf zweyerley Art bewerkstelliget werden: dann entweder dividirt man unter sich, oder über sich. Die erste Art ist leichter; wir wollen sie also vor der zweyten erklären. Man solle 548 dividiren durch 2; das Exempel wird folgender massen gesetzt:

und zwar zuerst mit einfachen Zahlzeichen,

Was unter sich dividiren heisse, und in welchen Fällen diese Art zu dividiren besser seye, als die gleich folgende?

```
 548 | 274
 (2)..|
  4 ..
 ----
  14 .
  (2).
  14
 ----
    8
   (2)
    8
 ----
    0
```

Ich sage: 2 in 5 ist 2 mal enthalten; setze daher den Zweyer in die Stelle des Quotienten, und multiplicire den Quotienten mit dem Divisor; das Product 4 ziehe ich von 5 ab, und setze zum Rest 1 noch die

die folgende Zahl. Dann rucke ich den Divisor eine Stelle weiter zuruck, und sage 2 in 14 ist 7 mal enthalten; den Quotienten 7 multiplicire ich wieder mit dem Divisor 2, und subtrahire das Product 14, welches gerade aufgeht. Endlich setze ich das Zahlzeichen 8 herunter, und dividire nochmalen mit 2; da dann der Quotient 4 ist, und das Product 8 wiederum aufgeht: folglich ist der ganze Quotient 274. Nun kann man eben dieses Exempel auch über sich dividiren, in welchem Fall es also gesetzt wird:

Was über sich dividiren seye?

```
  1
 548 | 274
 222 |
```

Hier sage ich, 2 in 5 habe ich 2 mal; (setze also 2 in die Stelle des Quotienten) 2 mal 2 ist 4, 4 von 5 läßt 1; (streiche daher den 2 und 5 aus, und schreib über den Fünfer den Einser.) Dann setze ich den Divisor unter die folgende Stelle, und sage abermal, 2 in 14 habe ich siebenmal; (denn der Einser gilt hier noch; und da der Vierer nach steht, so heißt die Zahl 14; wobey man sich gewöhnen muß, Zahlen aussprechen zu lernen, die oft 2 bis 3 Zoll hoch stufenweis übereinander stehen; man spricht sie aber eben so aus, wie die Zahlen im Numeriren ausgesprochen werden;) 7 setze ich in die Stelle des Quotienten, und sage: 7 mal 2 ist 14, 14 von 14 geht

auf; dann streiche ich den Vierer und Einser aus. Endlich setze ich den Divisor unter den Achter, und sage 2 in 8 habe ich 4 mal, setze 4 in die Stelle des Quotienten, und sage abermal: 2 mal 4 ist 8, 8 von 8 geht auf; und streiche den 8 und 2 vollends aus. Diß heißt über sich dividiren. In kleinen Exempeln, besonders wo der Divisor nur eine einfache Zahl ist, kann man diese Art für bequemer halten, und der ersten, wegen ihrer Kürze, vorziehen; hingegen in grösseren Exempeln wird durch das viele Ausstreichen manchmalen Verwirrung entstehen, welche bey dem unter sich gehenden Dividiren verhütet wird. Ehe ich nun weiter gehe, muß ich zeigen, daß man wirklich durch die angeführte Methoden dasjenige erhält, was man verlanget. Man will wissen, wie oft 2 in 548 enthalten seye: weil nun 548 gleich ist 500 + 40 + 8, so suche ich zuerst, wie oft 2 in 500 enthalten seye; da finde ich dann leicht, daß es 200 mal enthalten, und 100 für die folgende Stelle übrig bleibe; ich setze also 200. Hernach forsche ich, wie oft 2 in 100 + 40, oder 140 enthalten seye, die Antwort ist 70 mal; dann ich darf 140 nur als 14 Zehner betrachten, so finde ich, daß sie durch 2 getheilt 7 Zehner geben; diese setze ich auch besonders. Endlich suche ich noch, wie oft 2 in 8 Einheiten enthalten seye; Antwort, 4mal;

In welchen Fällen diese Methode vorzuziehen.

Beweis der Divisions-Regeln,

4mal: folglich ist der ganze Quotient 200 + 70 + 4, das ist 274. Hieraus ist klar, daß ich mir nur unnöthige Mühe machen würde, wenn ich allemal sagen wollte: wie oft ist der Divisor in so viel Tausendern, in so viel Hundertern, in so viel Zehnern u. s. w. enthalten rc. indeme die Stellen der Zahlzeichen selbst nach der Decimalprogreßion, wie wir im ersten Capitel gezeiget haben, diesen Werth der gefundenen Zahlen bestimmen, wenn ich sie schon in meiner Rechnung, Zeit und Mühe zu sparen, als blos einfache Zahlzeichen ansehe und ausspreche. Inzwischen ist dieses der Beweis von der Division, welcher sich auf alle nur mögliche Exempel anwenden läßt.

und ihr Vortheil, Zeit und Mühe zu sparen.

§. 53. Man muß auch mit zwey und noch mehr Zahlzeichen dividiren können. Folglich müssen wir auch von diesem Fall einige Exempel geben. Hier wird man sehen, wie bequem die Manier unter sich zu dividiren seye. Man solle 64285 durch 25 dividiren. Ich setze die Zahl und ihren Divisor nach der gegebenen Regel:

Wie man mit zwey und mehreren Zahlzeichen dividire.

```
64285 | 2571 10/25
(25)... |
50 ...
------
142..
(25)..
125 ..
------
178 .
(25).
175 .
------
35
(25)
25
------
10 Rest
```

Hier sage ich: 2 in 6 könnte ich zwar dreymal nehmen, aber wegen dem folgenden fünfer darf ichs nur 2 mal nehmen, (denn 25 ist in 64 nur zweymal enthalten,) setze also 2 in die Stelle des Quotienten, und sage 2 mal 25 giebt 50; 50 von 64 läßt 14. Zu dieser Zahl setze ich den folgenden Zweyer herunter, und schreibe meinen Divisor abermal so, daß sein letztes Zahlzeichen zur Rechten unter das letzte Zahlzeichen der zu dividirenden Zahl ebenfalls zur Rechten zu stehen komme; alsdann dividire ich wieder, und sage 2 in 14 könnte ich 7 mal, aber wegen dem folgenden fünfer kann ichs nicht so oft nehmen; ich will es also versuchen, und ihn fünfmal nehmen, weil 25 in 142 wenigstens 5 mal enthalten seyn

seyn muß; dieses gehet nun an: darum schreibe ich 5 in die Stelle des Quotienten, und sage wieder: 5 mal 25 ist 125, 125 von 142 läßt 17. Sodann setze ich das folgende Zahlzeichen 8 herunter, und verfahre wie bisher: am Ende bleibt nun nach geschehener völliger Division ein Rest übrig, der sich nicht mehr durch 25 dividiren läßt. Es giebt also einen Bruch, und heißt $\frac{10}{25}$. Will man die Probe machen, ob man recht gerechnet habe; so darf man nur den ganzen Quotienten mit dem Divisor multipliciren, und zum Product den übrig gebliebenen Rest addiren. Wann die zu dividirende Zahl wieder völlig herauskommt, so hat man recht gerechnet. Eben das von uns gerechnete Exempel siehet in der über sich gehenden Division also aus:

wie dasjenige, was etwa nach geschehener Division übrig bleibe, genennet werde;

was die Probe der Division seye.

wie man mit zwey und mehr Zahlen über sich dividire.

```
  1 (1
1 3 7 3 (0
6 4 2 8 5 | 2571
2 5 5 5 5
  2 2 2
```

Denn ich sage, 25 in 64 habe ich 2 mal; 2 mal 5 ist 10, 0 von 4 bleibt 4, behalt eins; 2 mal 2 ist 4 und 1 behalten ist 5, 5 von 6 läßt 1. 25 in 142 habe ich 5 mal; 5 mal 5 ist 25, 5 von 2 kann ich nicht, entlehne also eins von 4, und sage, 5 von 12 läßt 7, behalt 2; der Vierer wird we-

Erste Methode.

gen dem Entlehnen zum Dreyer; 5mal 2 ist 10 und 2 behalten ist 12, 12 von 13 läßt 1. 25 in 178 habe ich 7mal und so weiter. Diese Methode hat Herr Baron von Wolf in seinen Anfangsgründen gebraucht. Nach der allergemeinsten Weise bekommt endlich das Exempel auch diese Gestalt:

Zweyte und gemeine Methode,

~~1~~~~1~~~~3~~(1
~~2~~~~4~~~~7~~~~3~~(0 |
~~6~~~~4~~~~2~~~~8~~~~5~~ | 2571
~~2~~~~5~~~~5~~~~5~~~~5~~ |
~~2~~~~2~~~~2~~

Denn ich sage: 2 in 6, 2mal; 2 mal 2 ist 4, 4 von 6 läßt 2; 2 mal 5 ist 10, 1 von 2 läßt 1, 0 von 4 läßt 4. ferner 2 in 14, 5 mal; 2 mal 5 ist 10, 1 von 1 geht auf, 0 von 4 bleibt 4; 5 mal 5 ist 25, 2 von 4 läßt 2; 5 von 2 kann ich nicht, entlehne also 1 von 2; streiche es sogleich aus, und setze 1 darüber; 5 von 12 läßt 7. 2 in 17 habe ich 7 mal, 2 mal 7 ist 14, 1 von 1 geht auf; 4 von 7 läßt 3; 5 mal 7 ist 35, 3 von 3 geht auf, 5 von 8 läßt 3. Endlich 2 in 3 habe ich 1 mal; 2 mal 1 ist 2, 2 von 3 läßt eins; 1 mal 5 ist 5; 5 von 5 geht auf, oder läßt 0. Der Rest wird in ( ) eingeschlossen. Diese Methoden nun kann man, wegen den ausgestrichenen Zahlen, nicht ohne mündlichen Unterricht vollkommen lernen: weil

warum man zu Erlernung der letztern zwo Methoden einen le-

nem-

nehmlich alle Zahlen ausgestrichen sind, und ein Anfänger durch einen blos schriftlichen Unterricht es nicht sogleich einsiehet, welche Zahlen hie und da noch in der Operation gelten. Was aber die Art unter sich zu dividiren betrifft; so hat man keinen lebendigen Lehrmeister dazu nöthig, wenn man auf das, was wir gesagt haben, Achtung geben will. Wer nun mit 2 Zahlen dividiren kann, der kann es auch mit 3 und mit noch mehrern. Uebrigens was einer für eine Methode von Jugend auf gelernet hat, dabey wolle er bleiben, damit er sich nicht bey Erlernung vielerley Methoden in Verwirrung bringe. Denn alle Manieren zu dividiren führen zu einerley Zweck, und beruhen auf dem §. 52. gegebenen Grund. Kommen bey der Division in der zu dividirenden Zahl Nullen vor; so hat man, wenn man nicht wirklich dividiren kann, oder wenn der Rest, ehe die Division zu Ende gebracht ist, allzuklein wäre, weiter nichts zu thun, als daß man in die Stelle des Quotienten, um den Werth des folgenden Zahlzeichens nicht zu gros zu machen, eine Nulle setzt, und sodann den Divisor um eine Stelle weiter fortrückt. Z. E. wenn ich 6 0 9 dividire durch 3, so ist die ganze Operation diese:

bendigen Lehrmeister nöthig habe.

Wie man bey Erlernung der Divisions-Manieren sich vor Verwirrung hüten solle.

Was man zu thun, wenn in der zu dividirenden Zahl Nullen oder auch kleinere Zahlzeichen, als der Divisor hat, vorkommen.

609	203
333	

Denn

Denn ich sage: 3 in 6 habe ich 2 mal, 3 in 0 nullemal, 3 in 9, 3 mal. Eben so geht es, wenn ich 627 durch 3 dividire:

627	209
333	

3 in 6 habe ich 2 mal, 3 in 2 nullemal, 3 mal 0 ist nulle, 0 von 2 läßt 2, 3 in 27 giebt 9 mal. Sollten aber im Divisore Nullen seyn, so können sie entweder in der Mitte oder am Ende stehen; im ersten Fall werden sie, wie in der Multiplication, behandelt; z. E.

Wie man dividire, wenn der Divisor Nullen in sich enthält, und zwar erstlich in der Mitte.

```
48.08 } 23
(204) {
408
------
 728
(204)
 612
------
 116 Rest.
```

Stehen sie aber am Ende des Divisors, so werden sie abgeschnitten, und die Division wird mit den blosen Zahlzeichen verrichtet. Z. E. Man solle 34086 durch 1000 dividiren, so ist der Quotient $34\frac{86}{1000}$, oder $\frac{34}{1}\Big|\frac{086}{000}$; weil 1 gar nicht dividiret, und die Nullen nur die Plätze ausfüllen müssen. Eben so ist 63582 durch 3000 divi-

zweytens am Ende; da dann eine oder mehr Nullen vorkommen können.

dividirt, = $\frac{63}{3} \Big| \frac{482}{100}$, das ist, wenn man wirklich dividirt,

$$\frac{6\!\!\!/3\!\!\!/ \,|\, 482}{3\!\!\!/3\!\!\!/ \,|\, 000} \quad 21\tfrac{482}{3000}$$

Man dividirt nemlich blos mit 3, wenn man vorhero am Ende gleichviel Zahlzeichen, als Nullen der Divisor hat, abschneidet, und sagt 3 in 6 ist 2 mal, 3 in 3 einmal; das übrige giebt einen Bruch. Die Ursache ist leicht zu verstehen; die abgeschnittene Zahlzeichen sind immer kleiner als der Divisor, weil allemal von der zu dividirenden Zahl ein Zahlzeichen weniger, als der Divisor Zeichen hat, abgeschnitten wird. Folglich läßt sich der Rest niemalen durch den ganzen Divisor theilen. Wer aber daran zweifelt, darf nur die Rechnung nach der allgemeinen Regel machen. Z. E.

Warum man am Ende der zu dividirenden Zahl so viel Zahlzeichen, als der Divisor am Ende Nullen hat, abschneiden dürfe.

$$\begin{array}{r|l} 63482 & 21\tfrac{482}{3000}. \\ (3000) & \\ 6000 & \\ \hline 3482 & \\ (3000) & \\ 3000 & \\ \hline 482 & \end{array}$$

Woraus deutlich erhellet, daß man allemal so viel Zahlzeichen, als Nullen dem Di-

Divisor angehängt sind, abschneiden dürfe, wenn man nicht ohne Noth längere Zeit und Mühe zu einem Exempel von dieser Art gebrauchen will.

Von der Division der genannten Zahlen.

§. 54. Die Division der genannten Zahlen wird eben so eingerichtet, wie die Multiplication; das heißt, man bringt die zu dividirende Zahlen vorher unter einerley Benennung, und macht die Gulden zu Kreutzer, die Ruthen zu Schuh, die Schuhe zu Zoll u. s. w. und dividirt sodann nach der Regel §. 52. Demnach werden 3 fl. 24 kr. durch 15 dividirt, wenn ich die Gulden durch die Multiplication mit 60 zu Kreutzer mache, und zu 3 mal 60 die 24 addire, hernach gewöhnlicher massen mit 15 dividire; nemlich

$$\frac{180 + 24}{15} = \frac{204}{15}\text{ kr.} = 204 \,|\, 13\tfrac{9}{15}\text{ kr.}$$

Sollte ein Quotient herauskommen, der grösser wäre als 60, so mache ich in diesem Fall durch die Division die Kreutzer wieder zu Gulden, und was übrig bleibt, setze ich in die Classe der Kreutzer. Und das ist nun das vornehmste, was von der Division in ungenannten und genannten Zahlen vorgetragen werden kann. Ehe wir

wir die Division nach der Buchstabenrechnung abhandeln, wollen wir vorher noch, unserer Gewohnheit gemäß, einige jedermann faßliche und leichte Sätze aus den bisherigen Regeln nachholen. Der erste ist: Eins dividirt nicht; folglich ist $\frac{6}{1}$ oder 6 dividirt durch eins = 6. Wo nur Ein Erbe ist, da hat man keine Theilung nöthig; das heißt, Eins dividirt nicht. So gemein dieser Satz ist, so nutzlich wird er uns im folgenden werden. Wiederum eine durch sich selbst dividirte Zahl giebt den Quotienten Eins; das ist der zweyte Satz. $\frac{6}{6}$ oder 6 dividirt durch 6 ist eins; 3 in 3, 20 in 20, 100 in 100 ist nur einmal enthalten.* Auch dieser leichte und faßliche Satz wird uns in Zukunft zu nützlichen Folgen Gelegenheit geben: Er heißt noch einmal also: **Eine durch sich selbst dividirte Zahl giebt Eins.** An diesen zween Sätzen wollen wir jetzo genug haben, und nun auch die Division der Buchstaben vortragen.

Einige leichte und gemeine Regeln, nebst ihrer Nutzbarkeit, werden vorgetragen.

Eins dividirt nicht, und eine Zahl durch sich selbst dividirt wird eins.

§. 55. In der Buchstabenrechnung werden die Grössen entweder durch blose Zeichen, oder wirklich durch die Absonderung und Auflösung der in der Multiplication geschehenen Verbindung dividirt. Der erste Fall ist leicht. Solle ich a durch b dividiren, so schreibe ich blos $\frac{a}{b}$

Von der Division der Buchstaben.

erster Fall, wenn die Division blos

oder

durch Zeichen bemerket wird.

oder $a : b$. Eben so wenn ich $ab + cd$ dividiren solle durch $x - y$, so ist der Quotient

$$\frac{ab + cd}{x - y} \text{ oder } (ab + cd) : (x - y)$$

folglich wird die Sache blos durch die Zeichen ausgedruckt, welche ich in der Einleitung von der mathematischen Sprache vorgetragen habe. Der andere Fall ist auch nicht sonderlich schwer. Dann wie die Buchstaben durch die Multiplication verbunden werden, so werden sie durch die Division wieder abgesondert; nun werden sie durch jene Operation blos zusammengesetzt §. 42. folglich muß man sie durch diese wieder von einander trennen, und den einen der getrennten Buchstaben in die Stelle des Quotienten setzen. Z. E. ab soll dividirt werden durch a, so ist der Quotient b, oder durch b, so ist der Quotient a; oder es ist

Zweyter Fall, wenn man wirklich dividiren kann.

$$\frac{ab}{a} \Big| \, b \quad \text{und} \quad \frac{ab}{b} \Big| \, a$$

$$\text{wie} \quad \frac{6.3}{6} \Big| \, 3 \quad \text{und} \quad \frac{6.3}{3} \Big| \, 6 \text{ ist.}$$

Denn wenn man beederseits den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, so hat man die zu dividirende Zahl wieder; nemlich b mal a ist ab, und a mal b ist ab; und 3 mal $6 = 6.3$ und 6 mal $3 = 6.3$. Nach dieser Regel werden alle Exempel in der

Buch-

Buchstabenrechnung gerechnet: also ist *aab* dividirt durch *ab* im Quotienten *a*; *abc* dividirt durch *ac* ist *b*; u. s. w.

$$\begin{array}{r|l} aab & a \\ (ab) & \\ aab & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} abc & b \\ (ac) & \\ acb & \end{array}$$

$$\overline{\quad 0 \qquad\qquad 0 \quad}$$

Denn im Product ist es gleichviel, wo die Buchstaben stehen, wann sie nur neben einander stehen; so ist $abc = acb = cba$, u. s. w. wie wir schon gesagt haben. Weil nun $\frac{ab}{b} = a$, und $\frac{ab}{a} = b$, nach den Multiplicationsregeln §. 42. so ist nothwendiger Weise auch $\frac{a}{b} \cdot b = a$; denn man darf nur nach den Grundsätzen der Einleitung schreiben

$$\frac{ab}{b} = a$$
$$\frac{ab}{b} = \frac{a}{b} \cdot b$$
$$\overline{\frac{a}{b} \cdot b = b;}$$

Da nun diese Rechnung allgemein ist, so wird $\frac{m}{n} \cdot n = m$, $\frac{ab}{mn} \cdot mn = ab$; $\frac{acd}{b} \cdot b = acd$ u. s. w. Das ist, eine Zahl durch eine andere dividirt,

und durch eben diese wieder multiplicirt, wird der gegebenen Zahl gleich seyn.

Was für Nebenfälle bey der Buchstabendivision noch vorkommen können.

§. 56. Nun können bey dieser Operation eben die Nebenfälle noch vorkommen, deren wir schon bey der Multiplication gedacht haben. Das ist: Es kann geschehen, daß man nicht nur plus mit plus, sondern auch minus mit minus, und plus mit minus, oder welches gleichviel ist, minus mit plus dividiren solle. Hier nun hat die Division einerley Regeln mit der Multiplication. Denn weil sie eine blosse Auflösung der durch die Multiplication verbundenen Buchstaben ist, und die Auflösung auf gleiche Weise geschehen muß, wie die Verbindung geschahe; so muß man beederseits nach einerley Regeln handeln, und auch bey der Division merken, daß einerley Zeichen plus und verschiedene im Quotienten, wie bey der Multiplication im Product, minus geben.

Wie man minus mit plus dividire.

Z. E. ich solle $aa - ad$ dividiren durch a, so ist der Quotient $a - d$; dann

Auflösung und Beweis.

$$
\begin{array}{r|l}
aa - ad & a - d \\
(a) & \\
aa & \\
\hline
-ad & \\
(a) & \\
ad & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

a in aa ist a mal; a mal a ist aa, aa von aa geht

aa geht auf; nun setze ich $-ad$ unter den Strich, und brauche meinen Divisor wiederum, wie bey den Zahlen. a in $-ad$ ist $-d$, $-d$ mit $+a$ giebt $-ad$, $-ad$ von $-ad$ geht auf. Wenn ich a in $-ad$ $+d$ mal genommen hätte, so wäre mein Product $+ad$ geworden, und das hätte sich gegen $-ad$ durch die Subtraction nicht aufheben lassen. Da es nun zwischen $-$ und $+$ kein drittes giebt, so ist klar, daß verschiedene Zeichen in der Division, wie in der Multiplication, minus geben. Die Probe ist leicht zu machen. Man multiplicire nur den Quotienten $a-d$, mit a, so wird $aa-ad$ herauskommen: welches abermal, weil diese Probe auf die Erklärung der Division sich gründet, einen richtigen Beweis giebt, daß, wenn man minus mit plus dividirt, der Quotient minus oder negativ werde.

Wie man minus mit minus dividire.

§. 57. Eben so können wir erweisen, daß minus durch minus dividirt plus gebe. Man solle $aa-ad$ mit $-a$ dividiren, so werde ich sagen müssen

Auflösung

$$
\begin{array}{r|l}
aa-ad & -a+d \\
(-a) & \\
aa & \\
\hline
-ad & \\
(-a) & \\
+ad & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$-a$ in $+aa$ ist $-a$ mal §. 56; $-a$ mit $-a$ multiplicirt giebt $+aa$, §. 45. $+aa$ von $+aa$ geht auf; $-a$ in $-ad$ ist $+d$ mal; $+d$ mit $-a$ multiplicirt ist $-ad$; $-ad$ von $-ad$ geht auf. Dann wann ich $-a$ in $-ad$ wollte $-d$ mal nehmen, so würde das Product aus $-d$ in $-a$ positiv und $+ad$ werden, §. 45. $+ad$ aber läßt sich in der Subtraction gegen $-ad$ nicht aufheben. Eben dieses sieht man auch in der Probe: denn der Quotient $-a+d$, multiplicirt mit dem Divisor $-a$, bringt gerade wieder die zu dividirende Zahl heraus, nemlich $aa-ad$. Wenn man nun ein grosses Exempel dividiren solle, so wird man durch die Beobachtung der vorgetragenen Regeln so leicht oder noch leichter zurechte kommen, als bey der Division in ungenannten Zahlen. Ob nun schon grosse und weitläuftige Exempel in der Buchstabendivision selten vorkommen, und man meistentheils durch eine allgemeine Formel das, was zu dividiren ist, blos anzeiget: so wollen wir doch eines geben, und alle Regeln dabey anzubringen suchen. Vorhero solle aber folgendes noch vorangeschicket werden

und Beweis.

$aa-bb$

$$\begin{array}{l|l} aa - bb & a + b \\ (a - b) & \\ aa - ab & \\ \hline +ab - bb & \\ (a - b) & \\ ab - bb & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Wie man grosse Exempel in der Buchstabenrechnung dividire.

a in aa hab ich a mal; a mal a ist aa, a mal $-b$ ist $-ab$, aa von aa geht auf; $-ab$ von keinem gleichen Product läßt §. 34. nach Veränderung der Zeichen $+ab$. a in ab habe ich b mal; b mal a ist ab und b mal $-b$ ist $-bb$; ab von ab geht auf, $-bb$ von $-bb$ geht auf. Eben so lassen sich auch grössere Exempel dividiren; wir wollen eines hersetzen:

$$\begin{array}{l|l} aa - bb - 2ac + cc & a + b - c \\ (a - b - c) & \\ aa - ab - ac & \\ \hline +ab - bb - ac + cc & \\ (a - b - c) & \\ +ab - bb - bc & \\ \hline +bc - ac + cc & \\ (a - b - c) & \\ -ac + bc + cc & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Wer sich das unmittelbar vorhergehende Exempel und die allgemeine Regeln der Division bekannt gemacht hat, wird das, was man dazu auszusprechen hat, von

 selbst

selbst hinzu sprechen können, ohne daß wir nöthig hätten, das weitläuftige a in aa habe ich a mal, u. s. w. beyzusetzen. Uebrigens kommen dergleichen Exempel nicht so gar oft vor, wie wir schon gemeldet haben. Eines wäre noch nöthig, daß wir nemlich zeigten, wie ein einfacher Buchstabe durch einen zusammengesetzten Divisor, z. E. a durch $a + c$, oder b durch $a + d$ u. s. w. dividirt werde; allein weil es einen Bruch dißfalls giebt, und wir noch nicht gezeigt haben, wie man Brüche multiplicirt, so müssen wir die wichtige und schöne Exempel von dieser Art in das folgende Capitel verspahren. Wir nennen sie aber vorläuffig schon nützliche Exempel, weil sie uns den Weg zeigen, wie man die ins unendliche fortgehende Progreßionen finden und hernach wieder summiren könne.

solche Exempel kommen aber nicht so oft vor.

Vorläuffige Anzeige, wie man einfache Buchstaben durch zusammengesetzte Divisores dividire;

warum man die ganze Auflösung dieser Frage hier noch nicht geben könne.

§. 57. Endlich müssen wir auch noch lernen, wie man die Dignitäten oder Potenzen dividire. Wir haben bey der Multiplication von ihnen schon gehandelt, und dürfen uns auf die daselbst gegebene Erklärung der Potenzen berufen. Wenn wir wissen, wie sie multiplicirt werden, so läßt sich ihre Division bald lernen. Eine Dignität ist z. E. a^4, oder $aaaa$; wenn ich diese durch a^3 oder aaa dividire, so bekomme ich a. Dann wir wollen wirklich nach der allgemeinen Regel dividiren:

Von der Division der Dignitäten oder Potenzen.

und zwar erstlich, wie eine Dignität überhaupt durch

$$\begin{array}{l|l} aaaa & a \\ (aaa) & \\ aaaa & \\ \hline 0 & \end{array}$$

eine andere von einerley Benennung wirklich dividirt werde.

Auflösung und Beweis;

Ich sage, *aaa* habe ich in *aaaa* nach der Regel *a* mal; *a* mit *aaa* multiplicirt giebt *aaaa*; dieses von *aaaa* subtrahirt geht auf. Eben so ist x^5 gleich *xxxxx*, wenn ich es nun durch x^2 oder *xx* dividire, so bekomme ich x^3; dann wann man wirklich nach der Regel dividirt, so hat man

$$\begin{array}{l|l} xxxxx & xxx \\ (xx) & \\ xxxxx & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Nutzbarkeit der hieraus gezogenen Regel.

Hieraus läßt sich nun eine allgemeine und höchstbrauchbare Regel für die Division der Dignitäten erlernen, welche die folgende ist: **Dignitäten von einerley Benennung werden durch einander dividirt, wenn man ihre Exponenten von einander subtrahirt.** Demnach ist $y^8 : y^3 = y^{8-3} = y^5$; $x^7 : x^4 = x^{7-4} = x^3$ u. s. w. Man kann die Sache auch aus der Natur der Multiplication beweisen; dann weil $x^4 . x^3 = x^{4+3}$ oder $x^7 =$ so muß $x^7 = x^{4+3}$ und $x^{4+3} : x^4 = x^3$ seyn. Allein der obige Beweis, den wir zuerst gesetzt haben, fließt aus der genetischen Erklärung der Buchstabendivision überhaupt, und ist

Anwendung der Regel auf einige be-

 da-

sonders wichtige Fälle.

dahero schon vollkommen deutlich und allgemein. Wir wollen noch einige Exempel geben, welche sich auf eben diese Regel gründen, unerachtet sie nicht so klar und augenscheinlich in die Sinne fallen. Man solle a^m mit a^n dividiren. Hier verfahre ich nach meiner Regel und sage $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Wenn ich wüßte was *m* und *n* wäre, so könnte ich einem die Probe gleich vor die Augen hin mahlen: denn gesetzt *m* wäre 3 und *n* wäre 2; so hiesse das Exempel: $a^{3-2} = a^1$; denn a^3 ist aaa und a^2 ist aa; folglich

$$\begin{array}{c|l} aaa & a. \\ (aa) & \\ \hline aaa & \end{array}$$

Da aber doch die Probe in allen Fällen angehet, ich mag für *m* und *n* setzen, was ich für Zahlen will; so muß auch der allgemeinste Ausdruck wahr seyn, daß nemlich $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Eben so ist $a^4 x^5 : a^2 x^3 = a^{4-2} x^{5-3} = a^2 x^2$; weil $a^4 x^5 : a^2 x^3 =$

$$\begin{array}{c|l} aaaaxxxxx & aaxx; \\ (aaxxx) & \\ \hline aaaaxxxxx & \\ \hline 0 & \end{array}$$

folglich wird abermal, wenn ich allgemeine Ausdrükke brauche, nach der gegebenen Regel seyn $\frac{a^n x^m}{a^r \; x^s} = a^{n-r} x^{m-s}$, und $\frac{x^r y^s}{x^m} = x^{r-m} y^s$.

Aus

Aus gleichem Grunde, weil die Regel allgemein und bewiesen, wird auch $x^1 : x^1 = x^{1-1} = x^0$, ferner $x^2 : x^3 = x^{2-3} = x^{-1}$, so auch $\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$, u. s. w. weil man nemlich den Exponenten des Divisors von dem Exponenten der zu dividirenden Zahl in diesem Fall nur subtrahirt, und wann man das grössere von dem kleinern subtrahirt, die Differenz negativ wird. Diese letztere Verwandlungen haben einen grossen und wahren Nutzen; man muß dahero wohl darauf Achtung geben. Wir haben nun alle, wenigstens die vornehmsten Ausdrücke, namhaft gemacht, die in der Division der Potenzen vorkommen, und die man sich vorzüglich bekannt machen muß, wenn man in den algebraischen Rechnungen etwas thun will.

Eine zweyte Art die Potenzen zu dividiren, welche sonst die Ausziehung der Wurzeln heißt.

§. 58. Es ist noch eine Division der Potenzen zurück, welche zu wissen gleich nöthig ist. Dann ich kann nicht nur eine Potenz durch eine andere gleichnamige überhaupt dividiren; sondern es kann auch geschehen, daß ich eine Potenz oder Dignität durch diejenige Potenz wieder dividire, aus deren etlichmaliger Multiplication sie entstanden ist: z. E. a^2 entstehet, wenn ich a mit a, oder mit sich selbst multiplicire; a^4 entstehet, wenn ich die

Potenz a^2 mit sich selbst multiplicire; a^9 entstehet, wenn ich die Potenz a^3 dreymal mit sich selbst multiplicire: dann a^3 ist aaa; folglich $aaa. aaa = aaaaaa$; und dieses Product, noch einmal mit aaa multiplicirt, giebt $aaaaaaaaa$, oder a^9. u. s. w. Nun verlangt man zu wissen, wie man es angreiffen müsse, wenn man diejenige Potenz suchen wolle, aus deren etlichmaliger Multiplication eine solche höhere Potenz entstanden ist. Die Potenz muß einem gegeben seyn; das ist, man muß einem sagen, ob man aus a^9 diejenige Potenz verlange, die 9mal mit sich selbst multiplicirt die Potenz a^9 gebe, oder ob man diejenige verlange, die 3mal mit sich selbst multiplicirt a^9 werde; im ersten Fall ist sie a, im zweyten aber a^3. Eine solche Grösse, welche etlichmal mit sich selbst multiplicirt eine höhere Potenz hervorbringt, heißt man eine Wurzel, und druckt sie durch das Zeichen $\sqrt{}$ aus. Die Wurzel einer Potenz, welche entstehet, wenn man die Wurzelgrösse um zweymal mit sich selbst multiplicirt, heißt die Quadratwurzel, und wird blos durch $\sqrt{}$ angezeigt; wenn sie aber 3 mal mit sich selbst multiplicirt worden ist, so heißt sie die Cubicwurzel, und wird geschrieben $\sqrt[3]{}$; was weiter hinaus gehet, heißt überhaupt die Wurzel 4, 5, 6, m, n, und wird geschrieben $\sqrt[4]{}$,

Auflösung und Beweis.

Was eine Wurzel seye, u. durch was für Zeichen die Wurzeln ausgedruckt werden.

$\sqrt[4]{}, \sqrt[5]{}, \sqrt[6]{}, \sqrt[m]{}, \sqrt[n]{}$. u. s. w. Nun fragt sichs, wie man eine solche gegebene Wurzel suchen müsse? Die höhere Potenzen in diesem Fall entstehen, wenn man die Exponenten mit einander multiplicirt; §. 50. folglich werden die Wurzeln wieder durch die umgekehrte Methode gefunden werden; das ist, **wenn man den Exponenten der Dignität mit dem Exponenten der Wurzel dividirt.** Ich suche $\sqrt[3]{}$ aus a^6, oder die Potenz, die 3 mal mit sich selbst multiplicirt, a^6 giebt; setze dahero $a^6 = aaaaaa$. Weil nun aa dreymal mit sich selbst multiplicirt $aaaaaa$ giebt; so ist $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, das ist, $a^2 = a^{\frac{6}{3}}$; dann ich darf nur wirklich den Exponenten der Dignität 6, durch den Exponenten der Wurzel 3 dividiren, so habe ich a^2. Ferner ist $\sqrt[2]{a^8} = a^4$; dann $a^{4 \cdot 2} = a^8$. Folglich wird $\sqrt[2]{a^8} = a^{\frac{8}{2}}$; hingegen $\sqrt[4]{a^8} = a^2 = a^{\frac{8}{4}}$. Eben so ist $\sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3$; dann $x^{3 \cdot 2} = x^6$ §. 50. folglich wird die Quadratwurzel daraus seyn $x^{\frac{6}{2}} = x^{\frac{3 \cdot 2}{2}} = x^3$. Die ganze Kunst besteht also darinnen, daß man den Exponenten der Dignität durch den Exponenten der gegebenen Wurzel dividirt. Diese Regel muß man sich wohl bekannt machen: dann sie ist eine von denenjenigen, die unter allen bisherigen

Allgemeine Regeln, die Wurzeln in Zeichen auszuziehen.

Erklärung dieser höchst brauchbaren Regel.

rigen

rigen Regeln in den algebraischen Rechnungen fast am häufigsten vorkommen, und den grösten Nutzen haben. Man muß sich aber auch in andere Exempel finden können, die einem nicht mehr so klar, wie die gegebene, vor die Augen hingemahlt, sondern durch Hülfe der allgemeinen Regel dem Verstand deutlich gemacht werden, wenn gleich die Einbildungskraft nicht mehr so geschäfftig dabey seyn darf. Ich solle zum Exempel die Cubicwurzel aus x^5 einem sagen, so schreibe ich kraft meiner Regel $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$; hier ist der neue Exponent ein Bruch, den man nicht durch die nebeneinander gesetzte Buchstaben faßlich genug für die Einbildungskraft vorstellen kann: aber der Verstand, der die gegebene Regel begreifft, wird dennoch nichts dagegen einwenden können. Eben so ist $\sqrt[3]{}$ aus x^1, oder aus x in der ersten Potenz, $= x^{\frac{1}{3}}$, ferner die Quadratwurzel aus x^3 ist $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$. Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit allgemeinen Ausdrücken; dann $\sqrt[m]{}$ aus x^{nm} oder $\sqrt[m]{x^{nm}}$ ist gleich $x^{\frac{nm}{m}} = x^n$; und $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ und $\sqrt[r]{x^{n+1}}$ ist gleich $x^{\frac{n+1}{r}}$; Wie man übrigens die Brüche der Exponenten

Anwendung auf einige schwerere Fälle, welche aber sehr oft vorkommen.

ten hier und da vermindern, kleiner machen und schicklicher ausdrücken solle, werden wir im folgenden Capitel zeigen. Den Nutzen von unserer Regel werden diejenigen erst recht erfahren, welche weiter kommen; ich kann dahero nicht umhin, meine Leser noch einmal zu erinnern, in der Kenntniß dieser Ausdrücke sich recht fest zu setzen; Leibniz und Newton haben sie zuerst gemeinnütziger gemacht, und sodann die gröste Erfindungen dadurch erleichtert. Was die Regel selbst betrifft, so ist sie faßlich und deutlich genug. Nur muß man dasjenige nicht vergessen, was ich von den Kräften des Verstandes und der Phantasie gesagt habe. Man siehet zugleich, daß auch in andern Wissenschaften diese Anmerkung brauchbar seye. Es können manchmalen Fälle vorkommen, die einem nicht so klar in die Augen fallen; dahero kommen Einwürfe, Logomachien, nichts heissende Consequentien. u. s. w. Sie entstehen aus dem Mißbrauch der Einbildungskraft, und aus dem Mangel der Erkenntniß allgemeiner Regeln. Denn wenn ich einmal die Allgemeinheit einer Regel bewiesen habe, so müssen auch alle Fälle, die darunter begriffen sind, nach selbiger sich richten. So ist der Satz des zureichenden Grundes in der Mechanik schon vom Archimedes für einen allgemeinen Satz erkannt worden. Aber in an-

Die Brauchbarkeit dieser Regel wird noch einmal angepriesen.

Einige allgemeine Anmerkungen, wie der Verstand durch die Mathematik auch in andern Wissenschaften geschärfet werde.

andern Fällen, die nicht so mechanisch vorgestellt werden können, hat man je und je seine Allgemeinheit in Zweifel gezogen. Wir wollen aber von dem Nutzen dieser Anmerkungen noch einige Beyspiele zum Beschluß geben.

§. 59. Wir haben gezeigt, daß eine Grösse, durch sich selbst dividirt, 1 wird; der Satz ist leicht, und wird von jedermann begriffen. $\frac{6}{6}$ oder 6 dividirt durch 6 ist eins; also auch a dividirt durch a ist 1, oder $\frac{x}{x} = 1$. Nun können wir aus diesem leichten Satz eine höchst fruchtbare Progression der Potenzen schon vorläuffig verstehen und herleiten, z. E. x^4 dividirt durch x giebt x^3, x^3 dividirt durch x giebt x^2, x^2 dividirt durch x giebt x^1, x^1 dividirt durch x^1 giebt 1, 1 dividirt durch x giebt $\frac{1}{x}$, und dieses dividirt durch x giebt $\frac{1}{x^2}$ u. s. w. d. i.

Vorläuffige Anzeige von der Progression der Potenzen, welche durch die Division immer abnehmen.

$$\frac{x^4}{x} = x^3$$
$$\frac{x^3}{x} = x^2$$
$$\frac{x^2}{x} = x^1$$
$$\frac{x}{x} = 1$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{x} : x = \frac{1}{x^2} \text{ u. s. w.}$$

Nun

Nun wollen wir $\frac{x}{x} = 1$, nennen x in der Potenz Nulle; oder x^0; und die unter $x^0 = 1$ stehende und abnehmende Potenzen ohne Brüche auszudrucken suchen. Wenn $1 = x^0$, so kann $\frac{1}{x}$ weder x^1 noch x^0 seyn; sondern es muß kleiner werden, wie z. E. $\frac{1}{6}$ kleiner ist als 6 und als 1; wenn ich nun den Bruch vermeiden will, so weiß ich kein tauglichers Zeichen, als wenn ich sage: der Bruch $\frac{1}{x}$ ist x, aber in der Dignität -1, und der Bruch $\frac{1}{x^2}$ ist auch x aber in der Dignität -2 u. s. w. Daß aber dieser Ausdruck aus den innern Gründen der Grössen-Lehre nothwendig folge, siehet man vorläuffig schon aus der §. 57. vorgetragenen und erwiesenen Methode, die Potenzen zu dividiren. Denn wenn ich x^1 durch x^2 dividire, so habe ich nach den angeführten Grundsätzen $x^{1-2} = x^{-1}$, folglich ist $\frac{1}{x}$ nach den wesentlichen Regeln der Buchstaben-Division dem Ausdruck x^{-1} vollkommen gleich. Demnach giebt es diese zwo gleiche Progressionen.

und wie man einen neuen höchst brauchbaren Ausdruck für die dividirte Potenzen erfunden habe.

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3, x^2, x^1, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-m} \\ x^3, x^2, x^1, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^m} \end{array} \right.$$

Auch diese Ausdrücke haben einen grossen Nutzen; indeme man z. E. für einen Bruch $\frac{1}{x^m}$ nur setzen darf x^{-m}, für $\frac{1}{a^4}$ nur

x^4, für $\frac{1}{ax^3}$ nur $a^{-1}x^{-3}$ u. s. w. Wir werden aber im folgenden Capitel davon handeln, auch zu seiner Zeit, wenn wir die Lehre von den Logarithmen vortragen, ihre Aehnlichkeit mit diesen Ausdrücken umständlich zeigen.

Uebung des Witzes in schneller Erfindung der Factorum und Divisorum einer Grösse;

§. 60. Nunmehro haben wir alles gesagt, was bey der Division zu sagen war. Eines fügen wir noch bey. Man kann eine nicht gemeine Fertigkeit des Witzes und der Scharfsinnigkeit zeigen, wenn man durch fleißiges Nachdenken und eine gute Uebung sich in den Stand setzet, die Factores eines Ausdrucks schnell zu finden, und hernach den Ausdruck selbst, wenn er nicht schicklich genug zur Rechnung wäre, damit zu verwechseln. So ist z. E. $ax - x = (a - 1)x$: denn wenn ich $a - 1$ mit x multiplicire, so bekomme ich $ax - x$; und wenn ich diesen Ausdruck mit $a - 1$ dividire, so bekomme ich x. Auf gleiche Weise ist $xy - y = (x - 1)y$, und $abx - bx = bx(a - 1)$; ferner $ax + x = (a + 1)x$, u. s. w. Diese Ausdrücke, welche einander gleich sind, kommen oft vor, und können mit Nutzen gebraucht werden. Eben so ist auch $aa - bb = (a - b).(a + b)$, $xx - yy = (x - y).(x + y)$ u. s. w. Man kann keine besondere Regeln davon geben, weil die Fälle so mannigfaltig sind, und man also durch die Menge

Einige am meisten vorkommende Exempel werden angeführt,

ge

ge der Regel nur überhäuft würde. So viel siehet man schon, daß eine fleißige Uebung das meiste thun müsse; indem die Divisores bald gefunden werden, wenn man weiß, durch was für Factores die zu dividirende Zahl in der Multiplication entstanden ist. Diß aber lernt man, wenn man allerhand Exempel mit einander multiplicirt, und auf die Producte sowohl als auf die Factores Achtung giebt. Die am häufigsten vorkommende Exempel haben wir selbst angeführet: dahero wir auch in diesem Stücke unsern Lesern nicht allzuviele Mühe zu machen gesonnen waren.

und gezeigt, wie man zu einer Fertigkeit in dieser Erfindung gelangen könne?

Drittes Capitel.

Von den einfachen Verhältnissen der Zahlen, und besonders von den Brüchen.

§. 61.

Eine einfache Verhältniß der Grössen bekommt man, wenn man zwo Zahlen mit einander vergleicht, und entweder auf ihre Differenz oder auf ihren Quotienten siehet. So können 2 und 6 mit einander verglichen werden. Dann ich kann sagen: 6 ist um 4 grösser als 2, oder welches gleichgültig ist, 6 weniger

Was eine einfache Verhältniß seye.

2 ist 4, oder auch 4 ist die Differenz zwischen 2 und 6; alle diese Ausdrücke sind von einerley Bedeutung §. 28. Hernach kann ich auch sagen, 6 ist 3 mal grösser als 2, oder 2 in 6 ist 3 mal enthalten, oder wenn man sechs durch 2 dividirt, so ist der Quotient 3, oder auch 2 kann ich durch die schnelle Subtraction von 6, 3 mal subtrahiren. Auch diese Ausdrücke gelten allesamt gleichviel. §. 51. Wenn ich nun bey zwo Zahlen auf die Differenz sehe, so habe ich eine arithmetische Verhältniß; sehe ich aber auf ihren Quotienten, so bekomme ich eine geometrische Verhältniß. Diese Namen muß man sich wohl bekannt machen. Sie sind nicht nur von grossem Nutzen, wie wir zeigen werden, sondern auch allgemein. Dann ich mag zwo Zahlen denken, was ich nur für will, so werden sie allemal eine arithmetische und geometrische Verhältniß haben können. Der Grund davon ist leicht zu begreiffen. Alle nur mögliche Zahlen lassen sich von einander subtrahiren, und wenn sie auch vollkommen gleich wären: dann in diesem Fall ist ihre Differenz null, z. E. 3 — 3 = 0; sind sie aber ungleich, so ist es vorhin klar, daß sie eine wirkliche Differenz haben. Da nun alle nur mögliche Zahlen eine Differenz von einander bekommen können, so läßt sich auch bey allen Zahlen eine arithmetische Verhältniß

Ihre Eintheilung in die arithmetische und geometrische Verhältniß.

Warum alle nur mögliche Zahlen diese doppelte Verhältniß haben können?

niß

niß gedenken. Das ist das erste. Das zweyte, daß alle nur denkbare Zahlen eine geometrische Verhältniß haben können, beweisen wir auf gleiche Art. Alle nur mögliche Zahlen lassen sich durch einander dividiren, der Quotient mag hernach ein Bruch, oder eine ganze Zahl, oder wenn man eine Zahl durch sich selbst dividirt, nur Eins seyn. §. 54. Folglich mag ich zwo Zahlen denken, was ich für will, so werde ich auch ihren Quotienten hinzudenken können. Wenn sie aber einen Quotienten haben, so können sie alle in einer geometrischen Verhältniß stehen. Das war nun das andere, das wir beweisen wollten. Eine arithmetische Verhältniß wird durch das Subtractionszeichen, eine geometrische aber durch das Zeichen der Division ausgedruckt; $a - b$ ist also eine arithmetische, hingegen $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ eine geometrische Verhältniß; oder $6 - 2$ ist durch eine arithmetische, und $\frac{6}{2}$ oder $6 : 2$ durch eine geometrische Verhältniß ausgedruckt. Die Gleichheit zweyer Verhältnisse heißt eine **Proportion**, davon wir im folgenden Capitel reden werden.

§. 62. Die arithmetische Verhältnisse, welche man inzwischen dem Namen nach behalten muß, bis wir im folgenden Capitel ihre Eigenschaften erweisen, haben keinen besondern üblichen Namen

bey den gemeinen Rechenmeistern bekommen. Hingegen hat man die geometrische Verhältnisse, welche weit öfter vorkommen, in der gemeinen Rechenkunst anders und zwar **Brüche** genannt. Ein Bruch (fractio) ist also in der Arithmetik nichts anders, als eine geometrische Verhältniß oder eine Zahl, die durch eine andere dividirt wird. Wenn die Zahl, welche dividirt wird, kleiner ist als der Divisor, so heißt der Bruch ein **ächter Bruch**; ist sie aber dem Divisor gleich oder gar grösser als der Divisor, so heißt sie ein **unächter Bruch**. Z. E. $\frac{6}{12}$ ist ein ächter Bruch; hingegen $\frac{6}{6}$ oder $\frac{6}{3}$ sind unächte Brüche. Die zu dividirende Zahl sowohl als der Divisor haben in der Lehre von den Brüchen andere und ganz neue Namen bekommen. Denn die zu dividirende Zahl heißt der **Zehler**, und der Divisor der **Nenner**. Also was in der Divisionslehre der Divisor ist, das ist in der Bruchlehre der Nenner. So ist z. E. in dem Bruche $\frac{3}{6}$, 3 der Zehler, (numerator), und 6 der Nenner, (denominator). Den Grund dieser Namen wollen wir zeigen, wenn wir die Art und Weise Brüche zu addiren und zu subtrahiren vortragen.

Geometrische Verhältnisse werden in der gemeinen Arithmetik Brüche genannt.

Was ächte und unächte Brüche seyen.

Was Zehler und Nenner heissen.

§. 63. Ehe wir aber diese Lehre abhandlen, müssen wir vorhero zeigen, welche Brüche grösser oder kleiner als andere seyen, und welche einander gleich seyen.

Wie man von der Grösse eines Bruchs urtheilen solle.

Es

Es ist etwas schwer, von der Grösse der Brüche zu urtheilen; die Regel heißt zwar so: je kleiner der Quotient ist, desto grösser ist der Bruch, und je grösser der Quotient ist, desto kleiner ist der Bruch. Allein diese Regel ist für Anfänger nicht faßlich und deutlich genug, wenn man sie nicht auf eine ganz leichte Art zu beweisen sucht. Wir wollen einen Versuch davon machen. Man theile eine Linie AB in 8 gleiche Theile:

Allgemeine Regel samt dem Beweis.

A 1 2 3 4 5 6 7 8 B

so wird $A8 = \frac{8}{8}$

$A7 = \frac{7}{8}$

$A6 = \frac{6}{8}$

$A5 = \frac{5}{8}$

$A4 = \frac{4}{8}$

$A3 = \frac{3}{8}$

$A2 = \frac{2}{8}$

$A1 = \frac{1}{8}$

Nun siehet man augenscheinlich, daß

$A8 > A7 > A6 > A5 > A4$ u. s. w.

folglich auch

$\frac{8}{8} > \frac{7}{8} > \frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{4}{8} > \frac{3}{8}$ u. s. w.

Dahero sich eine leichte Regel herausziehen läßt, welche also heißt: je öfter der Zehler im Nenner enthalten ist, desto kleiner ist der Bruch, wenn man ihn mit

einem andern vergleicht, dessen Zehler im Nenner nicht so oft enthalten ist. Die Linie von A bis 2 ist 2 Achttheile der ganzen Linie AB, oder $\frac{2}{8}$; diese Linie ist nun viel kleiner als die von A bis 6, welche 6 Achttheile der Linie AB in sich begreifft, oder $\frac{6}{8}$ heißt; folglich muß auch der Bruch $\frac{2}{8}$ weit kleiner seyn als $\frac{6}{8}$; da nun 2 in 8 4 mal, 6 in 8 aber nur einmal und etwas weniges darüber enthalten ist, so siehet man den Grund der angeführten Regel, von der Grösse der Brüche zu urtheilen. Die Sache ist also leicht, wenn die Nenner gleich sind. So ist z. E.

Anwendung der Regel, wenn die Nenner einerley sind.

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{7},\ \frac{4}{9} < \frac{8}{9},\ \frac{3}{25} < \frac{10}{25}$$ u. s. w.

Wenn aber die Nenner auch unterschieden sind, so muß man die Brüche vorher unter einerley Benennung bringen, wenn man ein zuverläßiges Urtheil fällen will; oder darf man nur im Kopf geschwinde dividiren, und sehen wie oft der eine Zehler in seinem Nenner, und hernach auch wie oft der andere Zehler in dem seinigen enthalten seye; in welchem Falle man nach der gegebenen Regel abermal ein sicheres Urtheil von der Grösse der Brüche geben kann. Z. E. $\frac{3}{28}$ und $\frac{1}{6}$ sollen nach ihrer Grösse beurtheilet werden; 3 in 28 ist 9 mal und noch etwas drüber enthalten, 1 in 6 aber nur 6 mal; also ist $\frac{1}{6}$ grösser als $\frac{3}{28}$; eben so ist $\frac{2}{5}$ grösser als $\frac{18}{325}$, $\frac{1}{3}$ grös-

wie man von der Grösse urtheilen solle, wenn die Nenner verschieden sind.

ser

ser als $\frac{5}{53}$ u. s. w. Man darf in diesen Fällen nicht jedesmal dividiren, sondern nur überhaupt durch das Anschauen der Zahlen gleichsam zu errathen suchen, welcher Zehler mehrmalen in seinem Nenner enthalten seye, wenn man nicht genau zu wissen verlangt, um wie viel ein Bruch grösser als der andere sey. Will man aber dieses wissen, so ist es am sichersten, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringt; wie wir an seinem Ort zeigen werden.

Wie man wissen könne, ob ein Bruch dem andern gleich seye?

§. 64. Eben hieraus läßt sich auch leicht bestimmen, welche Brüche einander gleich seyen. Ein Bruch ist dem andern gleich, wenn des einen Zehler in seinem Nenner so oft enthalten ist, als der Zehler des andern in seinem Nenner enthalten ist. So ist z. E.

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24}$ u. s. w. Denn eins ist in vieren so oft enthalten als 2 in 8, und 4 in 16, und 5 in 20, und 6 in 24 u. s. w. Dann der Quotient, oder wie er auch sonsten in der Bruchlehre heißt, der Exponens rationis, ist allemal 4. Man siehet den Gebrauch dieser Regel leicht ein, wenn nach geschehener Division des Nenners durch den Zehler alles aufgeht und kein Rest übrig bleibt; wenn aber etwas übrig bleiben sollte, so ist es besser, wenn man die beede Brüche unter einerley Benennung bringt, und sodann ihre Gleichheit

deutlich einsehen lernt. Z. E. $\frac{3}{7}$ und $\frac{6}{14}$ sind einander vollkommen gleich. Den Grund davon werden wir sogleich vortragen, und wie man Brüche unter einerley Benennung bringe, umständlich zeigen.

Allgemeines Fundamentalgesetz der geometrischen Verhältnisse und Proportionen, wird vorgetragen und ausführlich bewiesen.

§. 65. Wenn ich einen Bruch, das ist seinen Zehler und Nenner, durch eine dritte Zahl multiplicire oder dividire; so wird er nicht verändert, sondern so groß als vorhin, das ist, sich selber vollkommen gleich bleiben. Dieses ist das Fundamentalgesetz bey den Brüchen, welches wir jetzo, wegen seines grossen Nutzens, ausführlich beweisen wollen. Hier kommt uns nun ein leichter und gemeiner Satz, den wir schon angeführt haben, sehr wohl zu statten: nemlich der jedermann bekannte Satz: Eins multiplicirt und dividirt nicht §. 39. 54. Nun ist eine Grösse durch sich selbst dividirt, allemal eins; §. 54. folglich wird auch eine solche Grösse eine andere weder multipliciren noch dividiren, das ist, durch die Multiplication und Division weder grösser noch kleiner machen. Nun solle uns der Bruch $\frac{a}{b}$ gegeben seyn, ein Bruch, welcher allen nur denkbaren Brüchen gleich seyn kann. Dann a kann alle mögliche Zahlzeichen, oder alle mögliche Zehler, und b alle nur mögliche Nenner bedeuten:

ten: für a kann ich ja 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 30, u. s. w. und für b gleichfalls 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. setzen. Folglich ist der Bruch $\frac{a}{b}$ ein allgemeiner Ausdruck für alle Brüche, und was ich von dem Bruch $\frac{a}{b}$ beweise, das habe ich von allen nur denkbaren Brüchen bewiesen. Ein Bruch ist allemal eine gewisse Grösse, darum wird $\frac{a}{b}$ auch eine Grösse seyn: folglich wird er mit 1 dividirt oder multiplicirt weder grösser noch kleiner werden. Nun ist $\frac{m}{m}$ gleich eins, §. 54. und zwar so gut als $\frac{6}{6}$ gleich ist eins. Wenn ich also den Bruch $\frac{a}{b}$ mit $\frac{m}{m}$ multiplicire, so wird er noch ganz der vorige Bruch seyn, und nicht im mindesten verändert werden. Nun aber habe ich noch nicht gezeigt, wie man Brüche mit Brüchen multiplicirt; dahero weiß ich auch nicht, wie der Bruch $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m}$ nach geschehener Multiplication aussehen muß. Denn wenn ich sage: man muß Zehler mit Zehler, und Nenner mit Nennern multipliciren; so könnte ich einen Cirkel begehen, wenn ich hernach weiter unten die Multiplications-Regeln der Brüche aus dem gegenwärtigen noch nicht erwiesenen Fundamental-

gesetz erweisen wollte. Durch die blose Anzeige aber $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{a}{b}$ habe ich noch nichts gewonnen, weil ich dadurch noch nicht in den Stand gesetzt bin, den neuen Bruch recht zu schreiben und auszusprechen. Allein es ist schon viel gewonnen, wenn man nur diese blose Anzeige recht versteht, und weiß daß $\frac{a}{b}$ multiplicirt mit $\frac{m}{m}$ vollkommen dem vorigen und noch nicht multiplicirten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich seye. Und das haben wir bisher erwiesen. Nun wollen wir unabhängig von den Regeln der Multiplication zeigen, wie der multiplicirte Bruch aussehen müsse, und uns blos auf die in der Einleitung vorgetragene Grundsätze berufen. Der Quotient oder die Grösse des Bruchs $\frac{a}{b}$ solle n seyn, oder $\frac{a}{b}$ solle n gleich seyn. Wenn ich nun einen neuen Bruch durch das Calculiren herausbringe, dessen Grösse auch n ist; so wird dieser neue Bruch derjenige seyn, den ich gern schreiben und aussprechen möchte: denn wenn er ein anderer Bruch wäre, so würde seine Grösse der Grösse des vorigen gewis nicht vollkommen gleich seyn. Ich muß aber den andern Bruch $\frac{m}{m} = 1$ in meine Rechnung mit hineinbrin-

gen,

gen, doch so, daß ich keine Rechnungsart und Operation dabey brauche, die ich aus dem bisherigen nicht schon wüßte und verstünde. Ich setze also:

$\frac{a}{b} = n$ folglich ist, wenn man beederseits mit b multiplicirt, nach §. 9. 55.

$a = bn$ Und wenn man nochmalen

$m = m$ beederseits mit m multiplicirt

$am = bnm$ §. 9.

$: bm$ Endlich wenn man beederseits mit bm dividirt; so ist

$\frac{am}{bm} = n$ Da nun Anfangs gleich gesetzt wurde

$\frac{a}{b} = n$ so ist nach dem Grundsatz: wenn zwey Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich. §. 9.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

Folglich siehet der neue Bruch so aus, wie $\frac{am}{bm}$, weil er dem vorigen $\frac{a}{b}$ vollkommen gleich ist. Wir haben in diesem Beweis nichts angenommen, das nicht in der Einleitung und den Regeln der Division in ganzen Zahlen schon wäre erwiesen worden, zugleich aber auch ihn so deutlich gemacht, daß wir zu unsern

Lesern das gute Zutrauen haben, sie werden ihn verstehen. Eben so beweisen wir jetzo auch umgekehrt, daß ein Bruch durch eine dritte Zahl dividirt sich selbst gleich bleibe. Diesen Beweis, weil er dem vorigen ganz ähnlich ist, wollen wir kürzer machen. Der zu dividirende Bruch seye $\frac{am}{bm}$, der Divisor seye m. Nun setze ich abermal die Grösse des Bruches

$\frac{am}{bm}=n,$	so wird §. 9. 55.
$am=bmn,$	und weil
$m\ =m-$	so wird, wenn man beederseits damit dividirt,
$a=bn,$	
$\rule{3em}{0.4pt}:b$	und wenn man nochmalen beederseits mit b dividirt,
$\frac{a}{b}=n$	Da nun auch
$\frac{am}{bm}=n$	so wird
$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b},$	und folglich der durch m dividirte Bruch $\frac{am}{bm}$

nach der Division aussehen wie $\frac{a}{b}$. Das ist das Hauptgesetz, nach welchem sich alle Brüche, Proportionen und Progressionen richten, nemlich daß $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$ oder $a:b=ma:mb$.

§. 66. Hieraus siehet man nun in Rucksicht auf die Brüche, daß der Bruch unverändert bleibe, wenn man seinen Zehler und Nenner durch eine dritte Zahl multiplicire oder dividire. Z. E. der Bruch $\frac{6}{18}$ ist dem Bruch $\frac{6}{18} : \frac{3}{3}$ das ist $\frac{2}{6}$ gleich, und dieser Bruch ist eben so groß als $\frac{2}{6} : \frac{2}{2}$ oder $\frac{1}{3}$. Und das heißt man nun, aber auf eine sehr ungeschickte Weise, einen **Bruch kleiner machen.** Dann der Bruch wird nicht kleiner, sondern bleibt so groß, als er vorhin war, er wird nur anders und kürzer ausgedruckt; oder der Zehler und Nenner werden kleiner, nicht aber die Verhältniß oder der Bruch selbst. Wir wollen dahero lieber sagen, man bringe durch diese Division einen Bruch unter eine kürzere Benennung. Wenn nun Brüche in Zahlzeichen vorkommen, so hat man keine allgemeine Regel, Brüche kürzer auszudrücken, als daß man einem sagt, er solle es mit den schicklichsten Zahlen versuchen, ob der Zehler und Nenner so dividirt werden können, daß nichts übrig bleibt. Z. E. $\frac{24}{128}$ läßt sich durch 4 aufheben; (das ist der Name, den man dieser Operation mit den Brüchen zu geben pflegt;) dann 4 in 24 habe ich 6 mal, und 4 in 128 habe ich 32 mal: folglich heißt der neue Bruch $\frac{6}{32}$ und dieser läßt sich durch 2 noch kürzer machen, da er dann $\frac{3}{16}$ heißt, und noch eben so

Wie man einen Bruch kleiner machen oder kürzer ausdrucken könne.

groß

groß ist als $\frac{24}{128}$; Weil nun 2. 4 = 8, so läßt sich der grosse Bruch auch mit 8 auf einmal aufheben: dann 8 in 24, ist 3 mal, und in 128, 16 mal enthalten. Der Bruch $\frac{3}{16}$ kann nicht kürzer werden: dann 3 läßt sich nur mit 3 dividiren; 16 aber geht durch die Division mit 3 nicht auf, sondern läßt eins übrig. Folglich ist $\frac{3}{16}$ der kleinste Ausdruck des Bruchs $\frac{24}{128}$.

Was von den Regeln zu halten, welche anzeigen, durch was für Zahlen eine andere gegebene Zahl sich völlig dividiren lasse.

Es ist in allewege nöthig, daß man die Brüche unter kürzere Benennung bringe, indeme diese Reduction in allen Rechnungen, vornehmlich in solchen, die man im gemeinen Leben braucht, keinen geringen Nutzen hat: inzwischen halte ich doch dafür, daß man dem ungeachtet niemand mit vielen Regeln bey dergleichen Fällen, wo die Uebung das beste thut, überhäuffen solle. Damit wir aber unsere Leser noch besser überzeugen; so wollen wir eine Regel, welche in dieser Art die leichteste und vollkommenste heissen kann, hersetzen. Es kommt darauf an, daß man wisse, durch was für Zahlen zwo andere Zahlen sich so dividiren lassen, daß nach geschehener Division nichts übrig bleibe. Nun wollen wir die Stellen der Zahlzeichen nach der Ordnung der Buchstaben a, b, c, d, und so weiter nennen. Die letzte Classe, nemlich die Classe der Einheiten, solle a heissen, oder a solle die Einheiten, b die Zehner, c die

Hun-

Hunderter, d die Tausender, e die Zehentausender, f die Hunderttausender, g die Tausendmaltausender oder Millionen und so weiter anzeigen. Folglich werden alle mögliche ganze Zahlen durch die allgemeine Formel $a + 10b + 100c, + 1000d + 10000e + 100000f + 1000000g$ u. s. w. ausgedruckt werden. Nun dividire man diese Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. w. und merke was nach geschehener Division übrig bleibt. Läßt sich der Rest durch den Divisor noch so dividiren, daß nichts übrig bleibt, so läßt sich die ganze Zahl durch eben diesen Divisor dividiren. Bleibt aber etwas übrig, so kann man nicht dividiren. Man dividire also zuerst durch 2, so ist der Quotient $\frac{a}{2} + \frac{10}{2}b + \frac{100}{2}c + \frac{1000}{2}d$ u. s. w. Folglich bleibt allein a übrig, dann 10 a lassen sich durch 2 vollkommen dividiren; so auch 100 c, und 1000 d u. s. w. Eben so macht man es mit den übrigen Divisorn; z. E. wenn ich mit 3 dividire, so bleibt $a + b + c + d + e + f$ u. s. w. das ist, die Summe aller Zahlzeichen ausser ihrem Rang betrachtet, übrig. Dann $\frac{a}{3} + \frac{10}{3}b + \frac{100}{3}c + \frac{1000}{3}d$ u. s. w. $= \frac{a}{3} + 3b + \frac{b}{3} + 33c + \frac{c}{3} + 333d + \frac{d}{3}$ u. s. w. Folglich ist dasjenige, was in der Division nicht aufgehet, und also übrig bleibt, $a + b + c + d$ u. s. w. Aus dieser Rechnung wird nun fol-

Eine allgemeine Regel, wie man alle Divisores einer Zahl finden könne, wird angeführt und erwiesen.

folgende Tabelle erwachsen, in welcher die Divisores in der gewöhnlichen Ordnung der Zahlen fortgehen:

Divisores.	Residua oder Reste.
2	a
3	a + b + c + d + e + f + g u. s. w.
4	a + 2b
5	a
6	a + 4b + 4c + 4d + 4e u. s. w.
7	a + 3b + 2c + 6d + 4e + 5f + g + 3h u. s. w.
8	a + 2b + 4c
9	a + b + c + d + e u. s. w.
10	a
11	a + 10b + c + 10d + e + 10f u. s. w. das ist a — b + c — d + e — f + g — h u. s. w.

Hieraus lassen sich nun leicht allerhand Regeln begreiffen. Dann daran wird niemand zweifeln, daß, wenn ich den Rest selbst noch durch die gegebene Zahl ohne weitern Rest dividiren kann, die ganze Zahl selbst, ohne einen Rest zu lassen, dividiret werden könne. Wenn ich 384 mit 2 dividire, so ist nach unserm allgemeinen Ausdruck diese Zahl = 100. 3 + 10. 8 + 4. Nun läßt sich 100. 3 + 10. 8 vollkommen dividiren; wenn sich nun der Rest 4, welcher durch das a in der Tabell angezeigt wird, auch vollends durch 2 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl

Welche Zahlen sich durch 4, 5, und so

durch

durch zwey gerade dividiren. Folglich wird die erste Regel diese seyn: I. Wenn sich das lezte Zahlzeichen einer gegebenen Zahl durch 2 oder 5 oder 10 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl dadurch dividiren.

völlig dividiren lassen,

II. Wenn sich die Summe aller Zahlzeichen durch drey oder neune dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl dadurch dividiren.

welche durch 3 und 9 sich dividiren lassen,

III. Wenn das lezte Zahlzeichen zu dem mit 2 multiplicirten ohneins lezten addirt wird, und die Summe durch 4 dividirt gerade aufgeht; so läßt sich die ganze Zahl durch 4 dividiren.

welche durch 4 dividirt aufgehen,

IV. Wenn das lezte Zahlzeichen zur Summe aller vorhergehenden mit 4 multiplicirten Zahlzeichen addirt, sich durch 6 dividiren läßt; so läßt sich die ganze Zahl durch 6 dividiren.

welche durch sechse,

V. Wenn ich eine Zahl mit 7 dividiren will, so wird die Regel gar zu weitläufftig: dahero es am besten ist, wenn man die Formul in der Tabell ansiehet, und nach derselben den vorkommenden Rest dividiret; geht er auf, so läßt sich die ganze Zahl dividiren. Uebrigens erhellet zugleich, daß die Division durch 7 die schwerste und unbequemlichste seye. Weitere Regeln wollen wir nicht geben; der Leser kann sie selbst aus der Tabelle herausziehen. Eines merken wir bey der

und durch sieben u. s. w. dividirt werden können.

warum die Residua $a+10b$ u. s. w. gleich seyen $a-b+c$ u. s. w.

Division durch 11 noch an. Wir haben gesetzt $a+10b+c+10d$ u. s. w. seye gleich $a-b+c-d$ u. s. w. Der Beweis davon gründet sich auf die mit den Subtractionsregeln verglichene Regeln der Division in Buchstaben. Denn wenn ich z. E. 8 durch 9 dividire, so ist der Quotient zwar $\frac{8}{9}$; er kann aber auch $1-\frac{1}{9}$ seyn; denn man dividire wirklich, und bilde sich ein, der Divisor sey der zu dividirenden Zahl gleich, so hat man $\frac{8}{9}$ (−1 | 1;

Nutzen und Gebrauch dieser Anmerkung.

Die Probe wird die Operation klar machen: dann 1. 9 mit dem negativen Rest −1 ist der zu dividirenden Zahl 8 wieder gleich. Eben so ist $\frac{10b}{11}$ (−b | b, dann $11b-b$ ist wiederum gerade $10b$; folglich werden, wenn man alles durch 11 nochmalen dividiret, die Residua in der Tabelle seyn $a-b+c-d+e-f$ u. s. w.

Beurtheilung der gegebenen Regeln.

Nun stellen wir es unsern Lesern frey, ob sie diese Regeln sich bekannt machen, oder lieber aus der Uebung und durch oftmalige Versuche es lernen wollen, wie ein gegebener Bruch durch eine schnelle Division unter eine kleinere Benennung gebracht werden müsse. Die zwo erste Regeln, die wir gegeben haben, sind nicht nur leicht zu behalten, sondern auch auf eine leichte Weise anzuwenden. Die

übrigen

übrigen aber scheinen etwas mühsamer zu seyn.

Wie man Brüche unter einerley Benennung bringe?

§. 67. Wir haben gezeigt, wie man die Brüche kürzer ausdrucke; nun erfordert die Ordnung, daß wir auch zeigen, wie man sie unter einerley Benennung bringe: dann man kann sie weder addiren noch voneinander subtrahiren, es seye dann, daß sie vollkommen gleiche Nenner haben. Diese Kunst nun, Brüche unter einerley Benennung zu bringen, ist gar nicht schwer, wenn man das Fundamentalgesetz der Verhältnisse recht inne hat. Denn wenn ich $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ unter einerley Benennung bringen solle, so multiplicire ich nur den Bruch $\frac{a}{b}$ durch d den Nenner des andern, und den Bruch $\frac{c}{d}$ durch b den Nenner des ersten; da dann beede Brüche nicht nur einerley Nenner bekommen, sondern auch in Absicht auf ihre Grösse den vorigen zween Brüchen vollkommen gleich bleiben werden. Dann

Auflösung und Beweis.

$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ §. 65.

$\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}$ §. 65. folglich

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}$ welche beede letztere gleiche Nenner ha-

 ben,

Regel für zween Brüche, die man unter einerley Benennung bringen solle.

ben, wie man siehet. Die gemeine Regel bey zween Brüchen wird demnach also heissen: **Man multiplicirt den Zehler und Nenner eines jeden Bruchs durch den Nenner des andern.** Oder man multiplicirt beederseits ganz übers Creuz, und zugleich beede Nenner nach

Anwendung der Regel.

der Quere: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$; oder in Zahlen $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2\cdot5}{3\cdot5} + \frac{3\cdot4}{3\cdot5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$. Hat

Wie man mehrere Brüche unter einerley Benennung bringe?

man aber mehrere Brüche unter einerley Benennung zu bringen, so bringt man die obige Regel so oft an, als die Zahl der Brüche es erfordert. Z. E. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ werden unter einerley Benennung gebracht, wenn man einen jeden ganzen Bruch, das ist, seinen Zehler und Nenner, in das Product der übrigen Nenner multiplicirt: folglich wird man haben

Auflösung samt dem Beweis

$\frac{a}{b} \cdot df + \frac{c}{d} \cdot bf + \frac{e}{f} \cdot bd$, das ist, wenn man wirklich beederseits multiplicirt,

$$\frac{adf}{bdf} + \frac{cbf}{dbf} + \frac{ebd}{fbd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f},$$

oder in Zahlen

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1\cdot5\cdot4}{3\cdot5\cdot4} + \frac{2\cdot3\cdot4}{5\cdot3\cdot4} + \frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot3\cdot5} = \frac{20}{60}$$

$+ \frac{24}{60} + \frac{15}{60}$. Das ist nun die ganze Kunst, Brüche unter einerley Benennung zu bringen. Sie gründet sich auf

das

das allgemeine Gesetz, daß ein durch eine dritte unbestimmte Zahl multiplicirter Bruch weder vermindert noch vermehrt werde, sondern einerley bleibe. Nun darf man in dem gegenwärtigen Fall nur eine solche dritte Zahl wählen, welche durch ihre Multiplication alle Nenner gleich macht, das ist, eine Zahl, deren Factores die einseitige Nenner sind. Folglich wird die allgemeine Regel diese seyn: Man multiplicire alle Nenner der Brüche miteinander, das Product wird der gemeinschaftliche Nenner werden. Hernach multiplicire man einen jeden Zehler nach dem andern in das Product aller übrigen Nenner, nur in seinen eigenen Nenner nicht; das Product wird der auf den gemeinschaftlichen Nenner sich beziehende Zehler seyn. Z. E. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$ sollen unter einerley Benennung gebracht werden. Der gemeinschaftliche Nenner

und Anwendung der Regel, auf verschiedene Fälle.

ist $= 4 . 2 . 3 . 5$
der erste Zehler $= 3 . 2 . 3 . 5$
der zweyte $= 1 . 4 . 3 . 5$
der dritte $= 2 . 4 . 2 . 5$
der vierte $= 2 . 4 . 2 . 3$

Demnach heissen die reducirte Brüche selbst:

$$\frac{3.2.3.5}{4.2.3.5}+\frac{1.4.3.5}{2.4.3.5}+\frac{2.4.2.5}{3.4.2.5}+\frac{2.4.2.3}{5.4.2.3}$$
$$=\frac{90}{120}+\frac{60}{120}+\frac{80}{120}+\frac{48}{120},=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}.$$ Dieses ist die gewöhnlich-

 ste

ste Art, Brüche unter einerley Benennung zu bringen. Wir halten sie auch für die vortheilhafteste und bequemste Art: dann wer fertig multipliciren kann, wird bald damit zurechte kommen, und keine andere oft blos eingebildete Hülfsmittel, Zeit und Mühe zu sparen, nöthig haben.

Nutzbarkeit der gegebenen Regel.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

§. 68. Nunmehro wird man die Regel, Brüche zu addiren und zu subtrahiren, bald verstehen. Man begreifft leicht, daß sie weder addirt noch subtrahirt werden können, wenn sie nicht einerley Nenner haben. Wenn ich sechs Species Gulden und drey Species Ducaten nicht zusammen addiren und auch nicht von einander subtrahiren kann, es seye dann, daß ich beeden Geldsorten einen gemeinschaftlichen und gleichen Namen gebe; so muß ich auch bey dem Addiren und Subtrahiren der Brüche auf gleiche Nenner bedacht seyn. Wie wir sie nun finden sollen, haben wir §. 67. gezeigt. Sind aber die gleiche Benennungen einmal gefunden, so darf man nur die Zehler zusammen addiren oder von einander subtrahiren. Der gemeinste Idiot weiß dieses. Denn wenn ein Bauersmann zu $\frac{2}{4}$ Tuch noch $\frac{1}{4}$ aus dem Laden kauft, so sagt er, er habe jetzo $\frac{3}{4}$ beysammen; und wenn ein Lehrjung von einem Rest, der nur noch $\frac{3}{4}$ hält, $\frac{1}{4}$ verkauft, so weiß er, daß er noch $\frac{2}{4}$ übrig habe.

Warum man bey gleichen Nennern nur die Zehler addiren und von einander subtrahiren dürfe.

habe. Folglich addiret und subtrahiret man nur die Zehler; wir wollen dahero diese leichte Sache nicht ohne Noth weitläufftig vortragen, und zum Beschluß nur diß einige noch melden, daß die Summe, wenn sie ein unächter Bruch würde, in ganze Zahlen durch die Division verwandelt werde; bleibt aber nach geschehener Division noch ein wahrer Bruch übrig, so wird er der Summe angehängt, und nach Befinden der Umstände auch kürzer ausgedruckt. Z. E. $\frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{3}{4}$; hier bringe ich die Brüche zuerst unter gleiche Benennung; da sie dann heissen werden $\frac{4 \cdot 10 \cdot 4}{5 \cdot 10 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 10}{4 \cdot 5 \cdot 10} = \frac{160}{200} + \frac{180}{200} + \frac{150}{200}$. Wenn ich nun die Zehler addire, so ist die Summe ein unächter Bruch $= \frac{160+180+150}{200} = \frac{490}{200}$. In diesem Bruch läßt sich der Zehler 490, durch den Nenner 200 wirklich dividiren; da dann heraus kommt $2\frac{90}{200}$, den angehängten wahren Bruch $\frac{90}{200}$ drucke ich durch die Division mit 10 kürzer aus, und bekomme $\frac{9}{20}$; folglich heißt die ganze Summe $2\frac{9}{20}$ oder $2 + \frac{9}{20}$. Eben so geht es bey der Subtraction: man solle von $\frac{3}{4}$ subtrahiren $\frac{1}{5}$; die Brüche werden zuerst unter einerley Benennung gebracht §. 67. und heißt folglich der Rest $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} - \frac{4}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{20}$. Diß ist alles, was man von der Addition und Subtraction der Brü-

wie man die herauskommende Summe behandeln, und in diesem Falle zuweilen unächte Brüche in ganze Zahlen verwandeln, auch andere ächte Brüche kürzer ausdrücken müsse.

 che

Von der Addition und Subtraction der Brüche in genannten Zahlen, und in der Buchstabenrechnung.

che zu wissen nöthig hat. Will man die Operation in genannten Zahlen verrichten, so setzet man dem Bruch nur am Ende die Münzsorten, Gewichter, Maase u. s. w. bey. Z. E. $\frac{3}{4}$ fl. — $\frac{1}{5}$ fl. = $\frac{11}{20}$ fl. denn wie man durch einen kürzern Ausdruck die Gulden zu Kreuzer u. s. w. mache, können wir gegenwärtig noch nicht zeigen, weil die Regel davon auf die Natur der Proportionen sich gründet, welche erst im folgenden Capitel vorgetragen werden. Die Addition und Subtraction der Brüche in Buchstaben ist ebenfalls mit zwey Worten noch gesagt. Man addirt oder subtrahirt die Zehler, und setzt unter die Summe oder die Differenz den gemeinschaftlichen Nenner; so ist, nach geschehener Reduction unter einerley Benennung, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ und $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$. Kommen auch Fälle vor, in welchen man plus und minus zu addiren oder von einander zu subtrahiren hat; so gehet alles nach den allgemeinen Additions- und Subtractionsregeln, die wir §. 26. 34. erkläret haben.

§. 69. Wie man Brüche addiren und subtrahiren kann, so kann man sie auch mit einander multipliciren und dividiren. Bey der Multiplication und Division der

Brü-

Brüche hat man aber diesen Vortheil, daß man sie nicht vorher unter einerley Benennung zu bringen genöthiget ist. Wir wollen zuerst von der Multiplication handeln. Die Regel davon ist allgemein, kurz und faßlich, aber etwas schwer zu beweisen. Sie heißt also: **Man multiplicirt Zehler mit Zehlern, und Nenner mit Nennern**; der daraus entstehende neue Bruch ist das Product der multiplicirten Brüche. Den sonst schwer scheinenden Beweis von dieser kurzen Regel wollen wir so leicht machen, als es nur möglich ist. Man muß aber die von uns umständlich schon vorgetragene Buchstabenrechnung im Kopf haben, wenn man ihn fassen will. Man solle den Bruch $\frac{a}{b}$, welcher alle mögliche Brüche vorstellt, multipliciren durch $\frac{c}{d}$, welcher ebenfalls der allgemeine Ausdruck für alle Brüche seyn kann. Nun wollen wir den Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ mit dem Buchstaben m, und den Werth des Bruchs $\frac{c}{d}$ mit dem Buchstaben n bezeichnen. Folglich wird, wenn man die mathematische Sprache und ihre Grundsätze in der Einleitung zu Rathe ziehet, nachstehende

Von der Multiplication der Brüche.

Warum man nur die Zehler mit Zehlern, und Nenner mit Nennern multipliciren müsse?

Beweis.

Rechnung niemand unverständlich seyn:

$$\frac{a}{b}=m \quad \cdot \frac{c}{d}=n$$

$$\overline{\quad\quad} \cdot b \quad \overline{\quad\quad} \cdot d$$

$$a=bm \quad c=dn$$

$$c=dn$$

$$\overline{ac=bdmn}$$

$$\overline{\quad\quad\quad} : bd$$

$$\frac{ac}{bd}=mn.$$

Hieraus siehet man, daß das Product der Werthe der zween gegebenen Brüche, nehmlich mn, gleich seye dem Ausdruck $\frac{ac}{bd}$; dieser Ausdruck aber ist nichts anders als $\frac{a.c}{b.d}$; folglich werden Brüche miteinander multiplicirt, wenn man ihre Zehler und Nenner nach der gegebenen Regel, miteinander multiplicirt. In wirklichen Zahlen ist also das Product aus $\frac{1}{3}$ in $\frac{4}{5}$ $= \frac{1.4}{3.5} = \frac{4}{15}$; das Product $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4} = \frac{1.1}{2.4}$ $= \frac{1}{8}$ u. s. w. Man siehet aber bey wirklichen Zahlen leicht, daß der multiplicirte Bruch kleiner werde, als seine Factores waren. Dann $\frac{1}{8}$ ist kleiner als $\frac{1}{2}$, und auch kleiner als $\frac{1}{4}$. Allein die Ursache ist wohl begreifflich. Denn wenn ich einen Bruch mit einem wahren Bruch multiplicire, so nehme ich ihn nicht etlichmal ganz, sondern

Anwendung der Regel auf besondere Fälle.

warum durch die Multiplication der

dern ein halbmal, ein viertelmal, u. s. w. folglich muß das Product kleiner werden. Man kann es auch aus gemeinen Exempeln lernen. Wenn ein Bauersmann die Hälfte von einer halben Ehle, oder eine halbe Ehle nur halben kaufen will oder nöthig hat; so weiß er wohl, daß er nur eine viertels Ehle bekommt oder braucht; folglich, daß die Hälfte einer halben Ehle, oder eine halbe Ehle ein halbmal genommen, das ist, das Product zweyer Brüche, kleiner seye, als der noch nicht multiplicirte Bruch der halben Ehle; wenn er schon die hier genannte Kunstworte nicht zugleich mit hinzudenket. Dieses Exempel ist ein Beweis, daß es nicht nur eine natürliche Mathematik gebe, sondern auch, daß die künstliche Mathematik von der natürlichen eben so wenig dem Wesen nach unterschieden seye, als die künstliche Logik von der natürlichen unterschieden ist.

Brüche das Product kleiner werde, als die Factores waren.

Uebereinstimmung der natürlichen und künstlichen Mathematik.

§. 70. Bey der Multiplication der Brüche ist nur ein Fall besonders noch zu merken übrig. Es kann geschehen, daß man ganze Zahlen und Brüche miteinander multipliciret. Nun fragt man, ob man in diesem Fall die ganze Zahl mit dem Zehler oder mit dem Nenner des Bruchs, oder mit beeden zugleich multipliciren müsse? Die Antwort ist leicht, wenn man weiß, was eine ganze Zahl

Wie man Brüche mit ganzen Zahlen multiplicire,

ist, oder wie man sie ansehen könne. Eine ganze Zahl ist eine gewisse Menge von Einheiten; folglich hat sie Eins zu ihrem Nenner. Ich darf also eine jede ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner Eins ist; dann Eins dividiret nicht, und die Zahl $\frac{6}{1}$ wird der Zahl 6 vollkommen gleich seyn. Durch diese Anmerkung kann ich nun den vorgegebenen Fall auf die allgemeine Multiplicationsregel der Brüche reduciren, und sagen $6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$. Damit ich aber nicht unnöthige Mühe habe, so kann ich, weil ich sehe, daß nur der Zehler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, und Eins den Nenner weiter nicht multiplicirt §. 39. folgende Regel festsetzen: **Wenn man Brüche mit ganzen Zahlen multiplicirt, so multiplicirt man nur den Zehler mit der ganzen Zahl.** Weil nun überdas, wie leicht zu erachten ist, in diesem Fall das Product grösser wird, als der noch nicht multiplicirte Bruch war; so giebt es einen unächten Bruch, den man durch die wirkliche Division in ganze Zahlen verwandeln, und ihnen, wenn ein wahrer Bruch noch übrig bleibt, solchen anhängen muß. Die Multiplication der genannten Zahlen macht hier keinen Unterschied. Was endlich die Buchstaben betrifft, so haben wir aus dem Beweis der

und warum man die ganze Zahl nur mit dem Zehler des Bruchs multipliciren dürfe.

Von der Multiplication der Brüche in genannten

Haupt-

Hauptregel die Art ihrer Multiplication zugleich gesehen. Sollte man aber plus mit minus, oder minus mit minus in Brüchen multipliciren, so richtet sich die Operation abermalen nach den allgemeinen Regeln der Multiplication in ganzen Zahlen, davon wir §. 42. 55. gehandelt haben.

Zahlen und in der Buchstabenrechnung.

§. 71. Man kann auch Brüche durch Brüche dividiren. So leicht und kurz nun abermal die Divisionsregel hier ist, so schwer pfleget manchen der Beweis davon zu fallen. Die Regel selbst ist die folgende: **Wenn Brüche einander dividiren, so wird nur der Divisor, oder der dividirende Bruch, umgekehrt, und hernach die ganze Operation in eine Multiplication verwandelt.** Wir wollen den Beweis nach eben denjenigen Sätzen vortragen, nach welchen wir den Beweis der Multiplication eingerichtet haben, folglich ihn wiederum so leicht machen, als nur immer möglich ist. Es seyen uns zween Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben; der letztere nemlich $\frac{c}{d}$ solle der Divisor des erstern $\frac{a}{b}$ seyn. Nun fragt man: wie wird der Quotient von der blos an-

Von der Division der Brüche.

Allgemeine Regel,

samt ihrem Beweis.

ge-

gezeigten Division $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ aussehen? Wir wollen ihn durch einen Bruch $\frac{m}{n}$ ausdrukken: dann er mag eine ganze oder gebrochene Zahl seyn, so wird der Ausdruck $\frac{m}{n}$ sich auf ihn schicken. Im erstern Fall ist eben n hernach eins. Unser Satz ist also richtig; es seye also:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n};$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{cm}{dn}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot dn$$

$$\frac{adn}{b} = cm$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot b$$

$$adn = bcm$$

$$\overline{\qquad\qquad} : n$$

$$ad = \frac{bcm}{n} \text{ oder}$$

$$ad = bc \cdot \frac{m}{n}$$

$$\overline{\qquad\qquad} : bc$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$$

Da

Da nun $\frac{m}{n}$ der Quotient ist, und dieser Quotient dem Bruch $\frac{ad}{bc}$ gleich gefunden worden; so sehen wir, wie der Bruch $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ nach geschehener Division aussiehet, dann er ist $= \frac{ad}{bc}$; oder $\frac{a \cdot d}{b.c} = \frac{ad}{bc}$. §. 69. Weil also $\frac{d}{c}$ nur der umgekehrte Divisor ist, so begreifft man den Grund der Regel, welche uns lehret, man solle den Divisor umkehren und hernach multipliciren. In wirklichen Zahlzeichen ist also die Operation nicht schwer: Man dividire $\frac{6}{10}$ durch $\frac{3}{4}$ so wird der Quotient seyn $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{3}$ oder $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ nach §. 66. Eben so ist der Quotient von $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ u. s. w. Man siehet aber auch hieraus, daß bey der Division der Brüche durch Brüche, der Quotient grösser werde als die zu dividirende Zahl. Die Ursach ist nicht schwer zu begreiffen: Im gemeinen Leben verstehet man ja einen, wenn man sagt: $\frac{3}{4}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$ giebt den Quotienten 3; man muß sich nur anders ausdrucken, und keine Kunstwörter gebrauchen. Denn wenn ich frage, wie vielmal sind $\frac{3}{4}$ Tuch grösser als $\frac{1}{4}$, so

Anwendung der Regel auf wirkliche Zahlzeichen.

Warum bey der Division der Brüche der Quotient grösser werde, als die zu dividirende Zahl war.

so wird ein Kind antworten und sagen können: dreymal; oder wenn ich frage, wie oft ist ein Viertel in drey Vierteln enthalten, so sagt man dreymal. Diese Frage aber heißt in den Kunstwörtern nichts anders, als: wie viel kommt heraus oder was ist der Quotient, wenn ich $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{4}$ dividire. Denn wenn ich wirklich dividire, so heißt der Quotient $\frac{3}{4} : \frac{4}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{4} = 3$. Der allgemeine Grund, warum die Quotienten grösser werden, ist also die in der Natur der Brüche gegründete Anmerkung: daß ein Bruch den andern nicht nur ein halb, ein drittelmal, u. s. w. sondern auch etlich ganze mal in sich enthalten könne. Bey den Brüchen findet sich also in Rucksicht auf die ganze Zahlen gerade das Gegentheil von dem, was im 2 Capitel erwiesen worden ist. Nemlich die Multiplication verkleinert den Bruch, die Division aber vergrössert ihn; und zwar beedes aus sichern Gründen, welche den in dem zweyten Capitel von ganzen Zahlen angeführten Beweisen nicht widersprechen.

Wie man Brüche durch ganze Zahlen.

§. 72. Wenn man Brüche mit ganzen Zahlen dividirt, so bedient man sich eben des Vortheils, den wir bey der Multiplication genannt haben. Man siehet nemlich den Divisor als einen Bruch an, dessen Nenner eins ist, kehret ihn her-

hernach um, und multiplicirt nach der Regel §. 70. z. E. $\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{4} : \frac{6}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$, $= \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. Um nun die Rechnung kürzer zu machen, weil eins weder multiplicirt noch dividirt; so giebt man die Regel: **Man solle den Divisor, wenn er eine ganze Zahl ist, blos in den Nenner des zu dividirenden Bruchs multipliciren; der neue Bruch wird der Quotient seyn.** Z. E $\frac{1}{4} : 8 = \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}$ u. s. w. Ist aber die zu dividirende Zahl eine ganze Zahl, und der Divisor ein Bruch, so wird eben der Divisor umgekehrt, und weil die zu dividirende Zahl auch einem Bruch gleichet, dessen Nenner eins ist, die Multiplication nach der Regel verrichtet. §. 70. Z. E. 6 sollen durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden; das ist, $\frac{6}{1} : \frac{1}{2} = \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{1}$ $= \frac{6 \cdot 2}{1} = 12$. Eben so ist $8 : \frac{3}{4} = \frac{8}{1} \cdot \frac{4}{3}$ $= \frac{8}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$. In Buchstaben ist also die Division folgende: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$; und $c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{a}$ $= \frac{bc}{a}$. Sollte minus mit plus, oder minus mit minus dividirt werden, so richtet man sich nach den allgemeinen Divisions-Regeln C. II. §. 55. Ein gleiches müssen wir von der Division in genannten Zahlen sagen.

und ganze Zahlen wiederum durch Brüche dividire.

Von der Division der Brüche in Buchstaben und genannten Zahlen.

Wie man einfache Grössen durch zusammengesetzte dividire, oder von der Verwandlung der Brüche in unendliche Reyhen oder Progreßionen.

§. 73. Es ist nur noch übrig, daß wir nach unserem Verspruch zeigen, wie man eine einfache Grösse durch eine zusammengesetzte dividirt, und solche nicht nur anzeiget, sondern wirklich dividirt; oder wie man einen wahren Bruch, das ist, den Zehler durch den Nenner wirklich dividiren und den Quotienten in eine unendliche Reyhe verwandeln könne. Es sey die zu dividirende Zahl a, und der Divisor b+c; folglich der Bruch $\frac{a}{b+c}$; nun dividire man wirklich:

$$
\begin{array}{l}
a \\
(b+c) \,\Big|\, \frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb} \text{ u. s. w.} \\
a + \frac{ac}{b} \\
\hline
- \frac{ac}{b} \\
(b+c) \\
- \frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb} \\
\hline
+ \frac{acc}{bb} \\
(b+c) \\
+ \frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb} \\
\hline
- \frac{accc}{bbb} \text{ u.s.w.} \\
(b+c)
\end{array}
$$

Denn

Denn wenn ich wirklich dividire, so sage ich b in a ist enthalten $\frac{a}{b}$ mal; $\frac{a}{b}$ multiplicirt in $b + c$ ist $\frac{ab}{b} + \frac{ac}{b}$ das ist: $a + \frac{ac}{b}$ (§. 55.) a von a geht auf, bleibt also $-\frac{ac}{b}$, weil $+\frac{ac}{b}$ von nichts subtrahirt im Reste giebt $-\frac{ac}{b}$; §. 55. Diese übrig gebliebene Grösse dividire ich abermal mit meinem Divisor $b+c$, und sage b in $-\frac{ac}{b}$ ist enthalten $-\frac{ac}{bb}$ mal, oder giebt den Bruch $-\frac{ac}{bb}$. Nun multiplicire ich den neuen Quotienten mit dem Divisor, und sage $-\frac{ac}{bb}.b+c$ giebt $-\frac{abc}{bb} - \frac{acc}{bb} = -\frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb}$; $-\frac{ac}{b}$ von $-\frac{ac}{b}$ geht auf; $-\frac{acc}{bb}$ von nichts abgezogen läßt $+\frac{acc}{bb}$; §. 55. Diesen Rest dividire ich abermal durch $b+c$; und sage: $+b$ in $+\frac{acc}{bb}$ giebt den Bruch $+\frac{acc}{bbb}$, welcher der neue Quotient ist; dieser Quotient wird wiederum

 in

in den Divisor b+c nach den allgemeinen Divisions-Regeln multiplicirt, und giebt das Product $\frac{abcc}{bbb} + \frac{accc}{bbb} = \frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb}$; $\frac{acc}{bb}$ von $\frac{acc}{bb}$ geht auf, und $\frac{accc}{bbb}$ von nichts subtrahirt, läßt den Rest $-\frac{accc}{bbb}$. Diesen dividire ich wieder, und setze die Operation bis ins unendliche fort. Es ist aber nicht nöthig, daß ich so viel Mühe habe: dann ich darf nur den Quotienten betrachten, so sehe ich schon, nach welchem Gesetze die Progression fortgehet. Er heißt $\frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb}$ u. s. w. oder

Warum man die Division nur auf 4 bis 6 Glieder fortsetzen dürfe, und wie man hernach die Regel der Progression finden könne;

kürzer $\frac{ab}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{c^4}$ u. s. w. folglich wechseln die Zeichen mit einander ab, die Nenner sind alle b, und steigen so in den Dignitäten, daß ihre Exponenten die in der Ordnung fortgehende natürliche Zahlzeichen sind; die Zehler sind alle multiplicirt in die von Nulle anfangende und sodann in natürlicher Ordnung fortgehende Dignitäten von c. Demnach wird das folgende Glied heissen $+\frac{ac^4}{b^5}$, und nach diesem wird kommen $-\frac{ac^5}{b^6}$ u. s. w.

s. w. Wann nun a = 1, c = 1, und b = 2, so ist $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ u. s. w. Ist aber auch b = 1, so ist $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. s. w. Dann man darf nur die Reyhe $\frac{a}{b+c}$ hersetzen: so kommt heraus

Was der Bruch $\frac{1}{2}$ für eine Progreßion gebe.

$$\begin{cases} \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ u. s. w.} \\ \frac{1}{1} - \frac{1.1}{1^2} + \frac{1.1^2}{1^3} - \frac{1.1^3}{1^4} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Nun aber dividirt und multiplicirt eins nicht, und eins ist in der zwanzigsten Dignität nicht grösser als in der ersten, das ist: Eins zwanzigmal mit sich selbst multiplicirt, oder 1^{20} ist eben eins. Folglich wird die zweyte Reyhe heissen $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. s. w. Guido Grandus hat aus dieser Reyhe beweisen wollen, daß unendlich viele Nullen in der Summe $\frac{1}{2}$ machen. Der ganze Fehler aber bestunde darinnen, daß er diese unendliche Reyhe Zahlen wie endliche Zahlen behandelt, und geglaubt hat, sie seye entweder gleich oder ungleich (numerus par vel impar). Ist sie gleich, so

Vorläuffige Anzeige, was man bey den unendlichen Progreßionen zu bemerken und zu verhüten habe.

so ist ihre Summe, weil allemal ein gleiches Paar $1 - 1 = 0$, eine Summe von lauter Nullen; ist sie aber ungleich, so giebt es allemal einen Ueberschuß entweder von -1 oder $+1$; folglich wäre $\frac{1}{2}$ entweder -1 oder $+1$. Das aber ist noch widersinnischer als das erste, daß $\frac{1}{2}$ eine unendliche Menge von Nullen seye. Die Antwort ist leicht: was unendlich ist, das ist weder eine gleiche noch ungleiche, sondern eine unendliche Zahl. Man muß also in diesem Fall den Rest, welcher immer $\frac{1}{2}$ bleibt, zur Summe, wenn sie auch unendlich wäre, noch addiren, oder diese Reyhe gar für unbrauchbar ansehen. Wir werden aber von dergleichen Reyhen im folgenden Capitel handeln. Uebrigens merken wir nur diß einige noch an, daß die Zeichen im Quotienten nicht abwechseln, wenn man a durch b — c dividirt: dann in diesem Fall, wenn man wirklich dividirt, bekommt man

Wie der Divisor beschaffen seye, wenn die Quotienten oder die Glieder der Progression in ihren Zeichen nicht abwechseln;

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^3}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ u. s. w.}$$

Wir wollen das Exempel nicht ausführlich hersetzen; wer das obige sich bekannt gemacht hat, wird dieses leicht von selbst und ohne Mühe durch die wirkliche Division finden können. Eines melden wir noch: wenn einer wissen wollte, wie groß eins in Brüchen wäre, so darf er nur se-

wie Eins in eine unendliche Reyhe von Brüchen

zen

zen a = 1, b = 2, c = 1. Da er dann haben wird $\frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. w. Und wollte er wissen, wie groß eine unendliche Summe von Einsern wäre, so darf er nur auch b = 1 machen, $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u.s.w. Folglich wäre Eins, durch Nulle getheilt, unendlich: dann eins ist wirklich unendlich mal grösser als nichts. Doch genug hievon. Im folgenden Capitel finden diese Rechnungen erst ihren eigenen Platz, woselbst wir zugleich die hier einfallende Schwierigkeiten auflösen werden.

verwandelt werden könne, und wie die Summe von unendlich viel Einsern ausgedruckt werde.

§. 74. Nunmehro könnten wir dieses Capitel beschliessen, wenn wir nicht in der Materie von den Dignitäten gehört hätten: daß auch die Exponenten Brüche haben. Weil man nun die Dignitäten addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren kann, so ist es in allewege nöthig, daß wir zeigen, wie diese Operationen verrichtet werden, wenn die Exponenten der Dignitäten Brüche sind; z. E. wie man $x^{\frac{1}{2}}$ zu $x^{\frac{2}{3}}$ addire, oder davon subtrahire, ferner wie man $a^{\frac{3}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{4}}$ multiplicire oder dividire u. s. w. Die ganze Kunst wird auch hier auf die allgemeine Regeln, die Brüche zu behandeln, ankommen. Bey der Addition und Subtraction bringt

Wie man Dignitäten, deren Exponenten Brüche sind, addiren und subtrahiren solle.

 man

man sie zuerst unter einerley Benennung, ehe man wirklich addirt oder subtrahirt. Diese Regel muß also auch bey den Exponenten, wenn sie Brüche sind, in ihrer Art statt finden. Folglich wird $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^4}$ seyn. Hier hat man sich nun wohl in Acht zu nehmen, daß man die Regel nicht zu weit ausdehnt, und den Schluß macht: die Summe von $x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{4}{6}}$ seye folglich $= x^{\frac{3+4}{6}} = x^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{x^7}$. Das wäre ein Hauptfehler wider die Buchstaben-Rechnung und wider diejenigen Regeln, die wir §. 56. 57. vorgetragen und erwiesen haben. Durch die Addition der Exponenten werden ja die Dignitäten mit einander multiplicirt; folglich wäre der Fehler so groß, als groß derjenige ist, wenn man, was addirt werden soll, mit einander multiplicirt. Wie nun ein beträchtlicher Unterschied zwischen $x^2 + x^2$, und zwischen x^{2+2} oder x^4 ist; so ist nicht weniger ein gleich grosser Unterschied zwischen $x^{\frac{2}{6}} + x^{\frac{2}{6}}$ und zwischen $x^{\frac{2+2}{6}}$ oder $x^{\frac{4}{6}}$. Darauf hat man nun sorgfältig Achtung zu geben; nicht als ob es eine Ausnahme der Regel wäre, sondern weil dieser Umstand ausdrücklich in der Regel enthalten ist. Man siehet hieraus, wie bestimmt

was man dabey besonders zu beobachten habe;

die

die Mathematik seye, und wie accurat sie einen mache. Die Regel heißt: Wenn man die Exponenten addirt, so werden die Dignitäten multiplicirt; folglich darf ich keine Exponenten, auch nicht einmal in Brüchen addiren, wenn man verlangt, daß ich Dignitäten addiren solle. Denn unerachtet die Regel der Brüche auch allgemein ist, und bey der Addition der Exempeln nach geschehener Reduction mich die Zehler addiren heißt; so sind ja in den vorgegebenen Exempeln die Brüche keine leere Brüche, sondern zugleich Exponenten der Dignitäten: folglich kann ich die Additionsregeln der Brüche hier nicht ganz gebrauchen, wenn ich nicht achtlos handeln, und die Regeln der Aufmerksamkeit verletzen will. Was aber die Reduction unter einerley Benennung betrifft, so findet sich bey den Dignitäten kein Umstand, der die Anwendung des allgemeinen Fundamentalgesetzes aller geometrischen Verhältnisse nicht gestatten sollte.

und wie accurat einen die Mathematik und die Anwendung ihrer Regeln mache.

Also wird die Potenz $a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3.2}{4.2}} = a^{\frac{6}{8}}$, die Potenz $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1.4}{3.4}} = x^{\frac{4}{12}}$ u. s. w. folglich auch allgemein: $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{ms}{ns}}$, und $x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{nr}{ns}}$ u. s. w. dahero die Summe von $x^{\frac{m}{n}} + x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{ms}{ns}} + x^{\frac{nr}{ns}}$ oder $\sqrt[ns]{x^{ms}} +$

$\sqrt[ns]{}$

$\sqrt[ns]{x^{nr}}$; und ihre Differenz $x^{\frac{ms}{ns}} - x^{\frac{nr}{ns}}$, oder $\sqrt[ns]{x^{ms}} - \sqrt[ns]{x^{nr}}$; nicht aber $x^{\frac{ms-nr}{ns}}$, dann das wäre der Quotient von $x^{\frac{m}{n}}$ dividirt durch $x^{\frac{r}{s}}$, wie wir nun gleich hören werden. Man siehet hieraus, wie man die Dignitäten unter schicklichere Ausdrücke bringen könne. So ist z. E. $x^{m-1} = x^{\frac{mn-n}{n}} = \sqrt[n]{x^{mn-n}}$; ferner $x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{n}{mn}} = \sqrt[mn]{x^n}$ u. s. w. Welche Ausdrücke einem öfters in Gleichungen mit andern Potenzen wohl zu statten kommen.

Wie man Dignitäten, deren Exponenten Brüche sind, mit einander multiplicire und dividire.

§. 75. Bey der Multiplication der Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, geht es nach der allgemeinen Regel §. 57. nemlich die Exponenten werden blos addirt. Weil man sie aber nicht addiren kann, wenn sie nicht vorher unter einerley Benennung gebracht werden; so muß man zuerst gleiche Nenner für sie nach der allgemeinen Regel §. 67. erfinden. So ist $x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{6}} . x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{3+4}{6}} = \sqrt[6]{x^{3+4}} = \sqrt[6]{x^7}$; und $x^{\frac{m}{n}} . x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{ms}{ns}} . x^{\frac{nr}{ns}} = x^{\frac{ms+nr}{ns}} = \sqrt[ns]{x^{ms+nr}}$; ferner $x^{-\frac{1}{m}} . x^{\frac{1}{m}}$

$= x$

$= x^{\frac{-1+1}{m}} = x^{\frac{0}{m}} = x^0 = 1$. Man darf nur die Probe in Zahlen machen, so wird man die Wahrheit des Ausdrucks leicht erfahren. Es seye z. E. $x = 4$, $m = 2$. so wird seyn $x^{\frac{-1}{m}} = 4^{\frac{-1}{2}} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}}$ und $x^{\frac{1}{m}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4}$ nun ist $\sqrt[2]{4} = 2$, und $\sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; und $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, wie wir oben in der allgemeinen Rechnung gefunden. Will man Dignitäten, deren Exponenten Brüche sind, dividiren, so wird der Exponent des Divisors von dem Exponenten der zu dividirenden Dignität subtrahirt, z. E. $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2-1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Sollten die Nenner der Exponenten ungleich seyn, so werden sie vorher unter einerley Benennung gebracht, und sodann nach der Regel die Zehler subtrahirt. Z. E. $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{4}{8}} : a^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{4-2}{8}} = a^{\frac{2}{8}} = \sqrt[2]{a^2}$; diese Operation richtet sich abermal blos nach den Divisionsregeln der Potenzen. Man darf nur wiederum die Probe in wirklichen Zahlen machen, und setzen $a = 16$; so ist $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = 4$ und $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} = 2$. Dann 16 ist die vier-

Probe und Exempel der Regeln in Zahlen.

vierte Dignität von 2. Folglich wird
$16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[2]{16} : \sqrt[4]{16} = 4 : 2 = 2.$
Eben das ist auch $16^{\frac{2}{8}} = \sqrt[8]{16^2}$; dann 16^2 oder 16 in der zweyten Dignität ist $= 16 . 16 = 256$; und 256 ist die achte Dignität von 2; wie man leicht aus beygesetzter Progression sehen kann:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Folglich ist $2 = \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{16^2}$. Demnach wird auch allgemein und in der Buchstabenrechnung seyn $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} : a^{\frac{nr}{ns}} = a^{\frac{ms-nr}{ns}} = \sqrt[ns]{a^{ms-nr}}$. Wie man nun Dignitäten von dieser Gattung multipliciren und dividiren kann; so lassen sie sich auch zu höhern Dignitäten erheben, oder in niedrigere heruntersetzen. Jenes geschiehet durch die Multiplication, dieses durch die Division der Exponenten. Wenn ich also $x^{\frac{1}{2}}$ zur dritten Dignität erheben oder dreymal mit sich selbst multipliciren will, so wird die neue Dignität heissen $x^{\frac{1}{2}.3} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3}$; und wenn ich $x^{\frac{n}{m}}$ zur Dignität r erheben will, so heißt diese neue Potenz $x^{\frac{nr}{m}}$. Wer Exempel in Zahl-

Wie man solche Dignitäten zu höhern erheben, oder gegebene Wurzeln aus derselben ausziehen könne.

zei-

zeichen nachrechnen will, wird sogleich die Probe davon machen können. Solle endlich die Cubic-Wurzel oder $\sqrt[3]{}$ aus $x^{\frac{1}{2}}$ gefunden werden, so ist die gesuchte Zahl $x^{\frac{1:3}{2}} = x^{\frac{1}{2\cdot 3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$. Auch hievon kann man die Probe in wirklichen Zahlzeichen machen. Der allgemeine Ausdruck wird also der folgende seyn: $\sqrt[m]{}$ aus $x^{\frac{r}{s}}$ $= x^{\frac{r:m}{s}} = x^{\frac{r}{ms}} = \sqrt[ms]{x^r}$; u. s. w. Alle diese Ausdrücke sind so beschaffen, daß man einen für den andern setzen kann, wenn die Rechnung dadurch hie und da sich erleichtern und faßlicher machen läßt. Wir wollen keine weitere Exempel anführen. Denn wenn man die §. 56 — 58. und überhaupt das bisherige mit Aufmerksamkeit gelesen hat; so wäre es etwas seltsames, wenn man die von uns gegebene Ausdrücke nicht verstünde, und keine ähnliche sogleich nachmachen könnte.

IV. Cap.

Viertes Capitel.

Von den Proportionen und den daraus fliessenden Regeln, wie auch von den Progressionen.

§. 76.

Was eine Proportion überhaupt seye, und wie die Proportionen eingetheilet werden.

Die Gleichheit zwoer Verhältnisse heißt eine Proportion. Nun giebt es arithmetische und geometrische Verhältnisse; §. 61. folglich giebt es auch arithmetische und geometrische Proportionen. Da nun eine arithmetische Verhältniß durch a — b ausgedruckt, und bey diesem Ausdruck auf die Differenz gesehen wird; so darf man nur zum ersten Glied die Differenz addiren, da dann die Summe allemal das zweyte Glied seyn muß. Der Beweis davon gründet sich blos auf die Erklärung der Subtraction, davon wir umständlich gehandelt haben. Dann wenn ich die arithmetische Verhältniß zwischen 2 und 5 suche, so will ich wissen, um wie viel 5 grösser sey als 2; da ich dann sogleich finde, daß die Differenz 3 und die gesuchte Zahl einerley sey. Addire ich nun 3 zu dem ersten Glied 2, so habe ich 2 + 3 oder 5, welches das zweyte Glied ist. Folglich ist 2 — 5 = 2 — (2 + 3) oder nach der allgemeinen Rechnung a —

Wie man auf die Natur der arithmetischen Proportionen kommen,

$b = a-(a+d)$. Wenn also die Differenz d ist und das erste Glied a, so wird der Ausdruck für alle mögliche arithmetische Verhältnisse seyn $a-(a+d)$. Zwo arithmetische Verhältnisse werden einander gleich, wenn ihre Differenz einerley ist, und durch diese Gleichheit entstehet eine arithmetische Proportion; wenn demnach das erste Glied a und das dritte b heisset, so ist der allgemeine Ausdruck für alle arithmetische Proportionen der folgende: $a-(a+d)=b-(b+d)$. Denn wenn ich von dem zweyten Glied das erste a subtrahire, so ist die Differenz d; und wenn ich von dem vierten Glied das dritte b subtrahire, so ist die Differenz abermal d. Wenn das dritte Glied dem zweyten gleich ist, oder wenn $a+d=b$, so ist die Proportion continuirlich, (proportio continua); wenn aber diese beede Glieder ungleich sind, so heißt die Proportion eine abgesonderte oder discrete Proportion; (proportio discreta). Z. E. $4-6$ ist eine arithmetische Verhältniß, deren Differenz 2 ist; nun wird eine Proportion daraus, wenn ich eine andere arithmetische Verhältniß von gleicher Differenz aufsuche, z. E. $3-5$; dann $4-6=3-5$ oder $2-(4+2)=3-(3+2)$; dieses ist nun eine discrete Proportion; sie wird aber continuirlich, wenn das dritte Glied dem zweyten gleich bleibt und auch 6 heißt:

und sie auf eine allgemeine Weise ausdrucken könne?

Was eine continuirliche arithmetische Proportion (proportio continua) und was eine abgesonderte (discreta) seye.

z. E.

z. E. $4-6=6-8$, oder $4-(4+2)=(4+2)-(4+2+2)$, und in Buchstaben $a-(a+d)=a+d-(a+2d)$. Die Zahlen oder Buchstaben, die in einer solchen Proportion, sie mag hernach arithmetisch oder geometrisch seyn, vorkommen, nennet man Glieder, und zwar nach der Stelle, wo sie stehen, das erste, das zweyte, das dritte, das vierte Glied.

Namen der Glieder einer Proportion.

§. 77. Wir handeln zuerst von den arithmetischen Proportionen; ihr allgemeiner Ausdruck ist $a-(a+d)=b-(b+d)$. Nun wollen wir sehen, was für Eigenschaften diesem wesentlichen Ausdruck der arithmetischen Proportionen zukommen. Wenn wir das erste und vierte Glied zusammen addiren, so wird ihre Summe der Summe der beeden mittleren gleich seyn: denn $a+b+d=a+d+b$.

Von den wesentlichen Eigenschaften der arithmetischen Proportionen,

Der erste Ausdruck ist die Summe der beeden äussersten, der zweyte aber die Summe der beeden mittlern Glieder. Da nun diese Summen augenscheinlich gleich sind, so haben wir ein sicheres und untrügliches Kennzeichen, nach welchem wir die arithmetische Proportionen beurtheilen können. So oft nemlich die Summe der beeden äussersten und der beeden mittleren Glieder gleich ist, so oft ist die vorgegebene Proportion eine arithmetische Proportion. Wenn also einer das vierte Glied

und wie man die Proportionen selbst darnach beurtheilen solle?

Glied suchen soll, so wird er es nach dieser Regel bald finden: denn es seye gegeben das erste Glied a, das zweyte b und das dritte c; nun wollen wir das vierte x nennen: folglich wird die Proportion heissen a—b=c—x. Da nun nach der Regel

Wie man das vierte Glied u. s. w. in einer arithmetischen Proportion suche?

$$a+x=b+c. \quad \text{So wird §. 9.}$$

$$\begin{array}{l} a = a \\ \hline x=b+c-a. \end{array}$$

Also wird das vierte Glied gefunden, wenn man von der Summe des zweyten und dritten Gliedes das erste Glied abzieht. Dieses solle zu gegenwärtiger Absicht genug seyn; wie man die mittlere Glieder in continuirlichen Proportionen, und hernach auch in Progreßionen andere Glieder suchen und finden solle, werden wir in diesem Capitel noch zeigen, wenn wir zuvor von den geometrischen Proportionen, die einen ungleich grössern und auf alle Theile der Mathematik sich erstreckenden Nutzen haben, das nöthigste gesagt haben.

§. 78. Eine geometrische Proportion ist die Gleichheit zwoer geometrischen Verhältnisse; sie wird, wie die arithmetische Proportion, in eine discrete und continuirliche eingetheilt. Wie man nun bey der ersten auf die Differenz siehet; so siehet man bey dieser, kraft der Natur der geometrischen Verhältnisse, auf den Quotienten.

Was eine geometrische Proportion seye,

ihr Unterschied von den arithmetischen Proportionen.

Allgemeiner Ausdruck für die geometrische Proportionen.

ten. Da nun der allgemeine Ausdruck einer geometrischen Verhältniß a : ma ist, § 65. so wird der allgemeine Ausdruck für alle geometrische Verhältnisse seyn: a : ma = b : mb; oder, wie wir umständlich § 65. erwiesen haben, a : b = ma : mb. Diese Fundamentalgleichung ist ungemein fruchtbar; und wir können nicht umhin, unsere Leser nochmalen zu erinnern, daß sie dasjenige, was jetzo gesagt werden solle, mehr als einmal überlesen müssen, wenn sie in den folgenden Theilen der Mathematik sich einen Fortgang versprechen wollen. Der Ausdruck gründet sich auf die Natur der Proportion, und ist also nicht nur ein allgemeiner, sondern auch ein wesentlicher Ausdruck.

Wie man die wesentliche Eigenschaften der geometrischen Proportionen nach und nach erfinden solle, wird angezeigt.

Nun wollen wir einen Versuch machen, und wie bey den arithmetischen Proportionen die beede äusserste und die beede mittlere Glieder addiren, damit wir sehen, was heraus kommt. Allein die Summe a + mb und b + ma sind nicht gleich; folglich haben wir durch diese Operation noch nichts gewonnen. Man versuche aber auch die Multiplication: wenn wir die beede äusserste und die beede mittlere Glieder mit einander multipliciren, so haben wir die Producte amb und bma; diese beede Producte sind nun vollkommen gleich. Folglich werden bey allen geometrischen Proportionen die Producte der

beeden äussern und mittlern Glieder einander gleich seyn; weil

$$a : b = ma : mb$$

$$amb = bma.$$

Dann was von diesem Ausdruck gesagt werden kann, das wird von allen nur möglichen Proportionen, wenn sie geometrisch sind, gelten. Es ist also eine Eigenschaft aller geometrischen Proportionen, welche darinnen besteht, daß das **Product der beeden äussersten Glieder, dem Producte der beeden mittlern Glieder gleich seye.** Allein darauf kommt es jetzo noch an, daß wir untersuchen: ob man diese Eigenschaft statt einer Erklärung der geometrischen Proportion gebrauchen, und sie nicht nur für einen allgemeinen, sondern auch für einen eigenthümlichen Charakter derselben ansehen dürfe? Dann in diesem Fall könnte ich nach den Bestimmungen der Logik sagen: so oft eine solche Eigenschaft sich bey einer Proportion zeiget, so oft ist die Proportion geometrisch. Die Eigenschaft muß aber, wie wir schon gemeldet haben, nicht nur allgemein, sondern auch der gedachten Proportion eigenthümlich seyn. Eine jede geometrische Proportion hat vier Glieder, die beede mittlern mögen hernach einander gleich oder ungleich seyn. Diese

Warum die Eigenschaft der geometrischen Proportionen, daß nemlich die Producte der äussersten und mittleren Glieder einander gleich seyen, statt einer vollkommen logischen Erklärung und Definition der Proportionen dieser Art gebraucht werden könne?

Eigenschaft ist allgemein, aber sie kommt auch den arithmetischen Proportionen zu. Folglich läßt sich noch nichts daraus für die geometrische Proportionen erweisen, weil sie ihnen nicht eigenthümlich ist. Man siehet also schon, wie viel daran gelegen seye, daß man vorher erweise, ein erfundener Charakter sey demjenigen Dinge, dem er zukommt, eigenthümlich, ehe man ihn zu einer Definition macht und weitere Beweise daraus ziehet. Das nöthigste davon habe ich in den Principiis cogitandi P. II. C. I. gesagt, und daselbst angemerket, daß man entweder zeigen müsse, der Charakter komme sonst keinem andern Dinge zu; oder daß man zu erweisen habe, er fliesse unmittelbar aus dem ganzen Wesen, das ist, nicht aus einzeln, sondern aus allen wesentlichen Stükken des Dinges zugleich genommen. Beedes können wir von der angeführten Eigenschaft der geometrischen Proportionen behaupten. Denn es giebt nur zweyerley Proportionen, nemlich arithmetische und geometrische; indeme alle übrigen, davon wir reden werden, unter diesen Hauptgattungen begriffen sind. Den arithmetischen Proportionen kommt die gefundene Eigenschaft, daß nemlich die Producte der äussersten und mittlern Glieder einander gleich seyen, nicht zu; §. 77. folglich ist sie den geometrischen eigenthümlich. Sie flies-

und warum man dieses vorzüglich genau erweisen und bestimmen müsse,

und wie viel an richtigen Erklärungen gelegen seye?

fliesset ferner aus allen wesentlichen Stükken der geometrischen Proportion: dann weil das zweyte Glied aus dem ersten m mal genommen, und das vierte aus dem dritten wieder m mal genommen besteht, so haben die Producte der äussern und mittlern Glieder einerley Factores; wo aber gleiche Factores sind, da sind auch gleiche Producte. Folglich ist die Eigenschaft, daß $a : b = ma : mb$ durch die Multiplication der äussersten und mittleren Glieder zwey gleiche Producte amb und bma gebe, der geometrischen Proportion wesentlich und eigenthümlich, wie es selbst der Augenschein bey den Buchstaben giebt. Die allgemeine Regel für alle geometrische Proportionen wird demnach also heissen: **Wenn in einer Proportion die Producte der beeden äussersten und der beeden mittlern Glieder einander gleich sind, so ist die Proportion geometrisch.** Ehe ich nun den vorzüglich grossen und allgemeinen Nutzen dieser Regel zeigen kann, muß ich die Leser noch erinnern, daß sie die arithmetische und geometrische Proportionen und ihre beederseitige Eigenschaften ja nicht mit einander vermengen, sondern was einer jeden eigenthümlich ist, sorgfältig von einander unterscheiden. Grosse Gelehrte haben sich hierinnen oft geirret, und ihre Schwäche gezeiget. **Caspar Schott** hat in seiner

Beweis und Wiederholung der Regel für die geometrische Proportionen.

Warum man sich besonders hüten solle, daß man die Eigenschaften

der arithmetischen und geometrischen Proportionen nicht vermenge, und wie oft grosse Meßkünstler sich hierinnen geirret haben?

Technica curiosa L. VIII. c. I. ein Exempel von einem sonst vollkommenen Meßkundigen, dessen Namen aber verschonet blieb, angeführt, und einen Fehler entdeckt, der bloß auf der Vermengung der beederseitigen von uns angeführten Eigenschaften beruhet. Wenn man von gleichem ungleiches subtrahirt, so werden die Reste sich umgekehrt verhalten wie die subtrahirte ungleiche Stücke; aber nur arithmetisch, und ja nicht geometrisch. Die zwey ungleiche Stücke sollen m und n seyn, das, wovon sie abgezogen werden, solle a heissen: so wird seyn: $(a - m) - (a - n) = n - m$. Denn wenn man die beede äusserste und mittlere Glieder addirt, so kommen gleiche Summen heraus; z. E. $a - m + m = a - n + n = a$. weil sich $-m$ und $+m$ wie auch $-n$ und $+n$ gegen einander aufheben. Also ist die Proportion arithmetisch, und nicht geometrisch. Der ungenannte Gelehrte hingegen hielte sie für geometrisch, und baute auf diese irrige Meynung eine sonst schöne und von einem nicht gemeinen Witz zeugende Demonstration den Cirkel zu quadriren, wie man sie in dem angeführten Buch, wie auch in des sel. Herrn Prof. Krafften Institut. Geom. sublim. nachsehen kann. Wir haben dieses Exempel um so eher angemerkt, je leichter es ist, Dinge, die so nahe zusammen grenzen, mit einander zu ver-

vermengen, und je mehr man deßwegen nöthig hat, die Liebhaber der Wissenschaften zu genauen, bestimmten, deutlichen und accuraten Ideen durch die Mathematik nach und nach zu gewöhnen.

Von dem mathematischen Ausdruck der Proportionen.

§. 79. Nunmehro können wir den Nutzen unsrer Regel zeigen. Dann wie man die arithmetische und geometrische Proportionen wenigstens bey uns Deutschen ausdrücke, haben wir schon in der Einleitung gemeldet. Unsere Leser werden sich also noch zu erinnern wissen, daß man jene mit dem Zeichen der Subtraction, z. E. $a - b = c - d$, diese aber mit dem Zeichen der Division, z. E. $a : b = c : d$ schreibet. Die letztere, nemlich die geometrische Proportion, ist, wie wir gehöret haben, die fruchtbarste. Wir wollen dahero unsere obige Regel auf sie anwenden, und sehen, wie man die Glieder versetzen, verändern, und so behandlen könne, daß bey aller Verschiedenheit doch immer noch eine geometrische wahre Proportion übrig bleibet. Die Fundamental-Proportion heißt $a : b = ma : mb$. Nun verändere man diese Gleichung, so oft man will; wenn nur nach geschehener Veränderung allemal vier Glieder herauskommen, und hernach die Producte der beeden äussersten und der beeden mittlern einander gleich sind, so wird die Proportion geometrisch seyn. Mich dünkt, diese Regel seye für

Woran man alle geometrische Proportionen am leichtesten, geschwindesten u. sichersten erkenne, und wie ferne man überhaupt die Glieder versetzen dürfe.

Anfänger leichter und faßlicher, als die gewöhnliche, nach welcher man einen auf die Exponenten der Verhältnisse weiset: dann wenn diese einerley oder gleich sind, so ist die Proportion gewiß geometrisch. Allein, wer noch nicht geübt ist, wird die Gleichheit der Producte viel eher noch als die Gleichheit der Exponenten einsehen. Die Exponenten sind oft so versteckt, daß man sie erst durch eine mühsame Division aufsuchen muß, da man im Gegentheil die Producte durch die Multiplication im Kopfe leicht berechnen und finden kann. Z. E. $2:9 = 4:18$, ist eine geometrische Proportion, dann $2.18 = 36$ und $4.9 = 36$. Dieses siehet man eher, als die Exponenten, welche $4\frac{1}{2}$ und $4\frac{2}{4}$ heissen; dann 2 in 9 ist $4\frac{1}{2}$ mal enthalten, und 4 in 18 ist $4\frac{2}{4}$ mal enthalten; da nun $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, so sind beederseits die Exponenten $4\frac{1}{2}$, folglich einander gleich. Die leztere Rechnung ist aber schon beschwerlicher als die erste, welcher wir dahero den Vorzug lassen, weil man billiger massen alle Regeln so kurz und faßlich vortragen solle, als nur immer möglich ist.

Warum es zuweilen schwer seye, die Exponenten aufzusuchen, und wie deßwegen die obige Regel, eine geometrische Proportion zu bestimmen, der sonst üblichen Regel vorzuziehen seye?

Von den Versetzungen und Veränderungen der Glieder.

§. 80. Nun wollen wir die Veränderungen der Fundamentalproportion suchen:

I. $a:b = ma:mb$.

$a:ma = b:mb$, hier haben wir die

die beede mittlere Glieder versetzt, dem ungeachtet kommen nach geschehener Multiplication einerley Producte amb und mab heraus; folglich darf man in einer geometrischen Proportion die beede mittlere Glieder versetzen.

Warum man die beede mittlere Glieder versetzen dürfe.

II. b : a = mb : ma. Hier wird das erste Glied zum zweyten und das dritte zum vierten gemacht, und die Producte bma und amb sind abermal gleich; folglich ist auch diese Versetzung erlaubt. Aus gleichem Grunde erhellet, daß man auch b : mb = a : ma, und ma : mb = a : b, und mb : ma = b : a, und mb : b = ma : a setzen dürfe.

Warum man das erste Glied zum zweyten, und das dritte zum vierten, und umgekehrt, machen dürfe.

III. a : b = ma : mb; nun subtrahire man das zweyte Glied vom ersten und das vierte vom dritten, folgender Gestalt, daß das zweyte und vierte dennoch bleibe, so hat man a — b : b = ma — mb : mb. Auch diese Proportion ist geometrisch, weil die Producte (a — b) mb und (ma — mb) b, oder wenn man wirklich multiplicirt, amb — bmb und mab — mbb wirklich einander gleich sind: dann das wollen wir nicht immer wiederholen, daß es gleichgültig seye, wo die Buchstaben oder Factores stehen. Folglich ist auch diese Proportion geometrisch, wenn es heißt, a — ma : ma = b — mb : mb, oder b — a : a = mb — ma : ma, oder mb — ma : ma = b — a : a; dann in allen diesen Fällen kommen durch

Von den Veränderungen durch die Subtraction.

die Multiplication der äussersten und mittleren Glieder gleiche Producte heraus.

Von den Veränderungen durch die Addition.

IV. Wenn ich das zweyte Glied zum ersten, und das vierte zum dritten addire, daß das zweyte und vierte doch noch in seiner Stelle bleibt, so habe ich $a + b : b = ma + mb : mb$. Auch diese Proportion ist geometrisch: dann die Producte $(a+b) mb$ und $b (ma + mb$, oder wenn man wirklich multiplicirt $amb + bmb$ und $bma + bmb$ sind wirklich einander gleich. Folglich wird gleichfalls seyn $a + b : ma + mb = b : mb$, und $ma + mb : a + b = mb : b$, und weil $mb : b = ma : a$, oder $\frac{mb}{b} = \frac{ma}{a}$, nach § 9. auch $ma + mb : a + b = ma : a$, u. s. w. Man darf nur sehen, ob allemal gleiche Producte herauskommen.

Von den Veränderungen durch die Multiplication.

V. Nun wollen wir gleiches mit gleichem multipliciren, und die Proportion $a : b = ma : mb$ durch die Multiplication ändern; z. E. $ab : bc = ma : mb$. Daß auch dieser Ausdruck geometrisch seye, zeigen die gleiche Producte $acmb$ und $bcam$ wiederum an. Ferner wird auch aus gleichem Grunde seyn $ac : mac = bc : mbc$, und $ac : mac = b : mb$, und $ac : mac = bd : mbd$, u. s. w. dann alle Producte sind nach der Regel einander gleich. Wie man aber einerley Sachen auf verschiedene Arten beweisen kann, so werden unsere Leser leicht begreiffen, daß man auch aus

§. 65.

§. 65. sowohl diese als die folgende Veränderung demonstriren könne.

VI. Wenn man die Proportionen durch die Division ändert, so wird man ebenfalls setzen können

Von den Veränderungen durch die Division.

$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{ma}{c} : \frac{mb}{c}$; dann die Producte $\frac{amb}{cc}$ und $\frac{bma}{cc}$ sind vollkommen gleich. Aus eben diesem Grunde darf man auch sagen $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = ma : mb$, weil $\frac{amb}{c} = \frac{bma}{c}$, und wiederum $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{ma}{d} : \frac{mb}{d}$ weil $\frac{bma}{cd} = \frac{amb}{cd}$. Ferner $\frac{a}{a} : \frac{b}{a} = 1 : \frac{b}{a} = ma : b$, und $\frac{1}{b} : \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = ma : mb$, weil $\frac{mb}{b} = \frac{ma}{a} = m$; ja auch $\frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{1}{mb} : \frac{1}{ma}$, weil $\frac{1}{bma} = \frac{1}{amb}$, u. s. w.

VII. Eben so geht es mit den Potenzen und Wurzeln; nur müssen in diesem Fall alle vier Glieder zu gleichen Potenzen erhöhet, oder zu gleichen Wurzeln erniedri-

Von den Veränderungen durch

die Erhöhung der Glieder zu gleichen Potenzen, und durch ihre Erniedrigung zu gleichen Wurzeln, welche letztere Veränderungen besonders wichtig und zu fassen sind.

driget werden. z. E. $a : b = ma : mb$, folglich $a^2 : b^2 = m^2 a^2 : m^2 b^2$, oder überhaupt $a^n : b^n = m^n a^n : m^n b^n$, weil $a^n m^n b^n = b^n m^n a^n$. Hier lassen sich nun alle Ausdrücke von Reg. I — V. wieder anbringen: denn ich kann auch setzen

$$a^n + b^n : b^n = m^n a^n + m^n b^n : m^n b^n$$ u. f.

Einen wollen wir besonders merken, nemlich den Ausdruck der Division; ich kann sagen $\frac{1}{b^n} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{m^n b^n} : \frac{1}{m^n a^n}$; dieser aber wird nach §. 59. kürzer und schicklicher ausgedruckt, wenn man schreibt: $b^{-n} : a^{-n} = m^{-n} b^{-n} : m^{-n} a^{-n}$, und weil die Proportion noch bleibt, wenn ich nach Reg V. nur die eine Verhältniß dividire, so darf ich auch sagen $\frac{1}{b^n} : \frac{1}{a^n} = m^n a^n : m^n b^n$; oder kürzer: $b^{-n} : a^{-n} = m^n a^n : m^n b^n$, dann die Producte $\frac{m^n a^n}{a^n}$ und $\frac{m^n b^n}{b^n}$ sind beederseits gleich, nemlich m^n. Mit den Wurzeln verfährt man auf gleiche Weise: denn es ist

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ma} : \sqrt[n]{mb}$, nicht aber

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = ma : mb$. Im ersten Falle nur sind die Producte der äussern und mittleren Glieder gleich, im letztern hingegen

gegen nicht, wie man sogleich augenscheinlich sehen kann: dann die erste Proportion heißt nach §. 58. $a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = m^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} : m^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$, da dann die Producte $a^{\frac{1}{n}} m^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$ und $b^{\frac{1}{n}} m^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}}$ vollkommen gleich sind. Im letztern Fall aber wären die Producte $b^{\frac{1}{n}} ma$ und $a^{\frac{1}{n}} mb$, welche offenbar ungleich sind; folglich kann die Proportion $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = ma : mb$, oder nach §. 58. $a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = ma : mb$, nimmermehr statt finden.

Ausser diesen einfachen Hauptfällen giebt es noch einige zusammengesetzte, welche zu wissen nöthig sind, und die wir daher nur kürzlich anzeigen wollen.

Wenn zwo Proportionen mit einander so übereinkommen, daß zwo Verhältnisse davon einer und eben derselben dritten Verhältniß gleich sind, so kommt auf eine dreyfache Weise die dritte Proportion heraus. Denn I. entweder sind die zwey erste paar Glieder, oder welches nach den Versetzungen gleichviel ist, die zwey letzte paar Glieder einander gleich; II. oder es ist das erste und dritte, oder zweyte und vierte paar Glieder, oder auch nach den Versetzungen das erste in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der einen dem vierten in der andern Proportion

portion gleich; III. oder endlich ist das erste und letzte paar, oder das zweyte und dritte paar Glieder, oder das erste paar in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der andern dem vierten in der ersten Proportion gleich. Im ersten Fall schließt man ex æquo, überhaupt; im zweyten ordinatim; im dritten perturbate.

Die folgende Exempel, die man sich wohl bekannt machen muß, werden das gesagte erläutern, wo der Beweis in Buchstaben dabey steht.

I. Fall: ex æquo simpliciter.

$$\begin{array}{ll} a:ma=b:mb & 4:8=3:6 \\ a:ma=c:mc & 4:8=5:10 \\ \hline b:mb=c:mc & 3:6=5:10 \end{array}$$

II. Ordinatim ex æquo.

1)
$$\begin{array}{ll} a:ma=b:mb & 4:12=2:6 \\ mna:ma=mnb:mb & 10:12=5:6 \\ \hline a:mna=b:mnb. & 4:10=2:5 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ll} a:ma=b:mb & 5:15=2:6 \\ ma:mna=mb:mnb & 15:30=6:12 \\ \hline a:mna=b:mnb. & 5:30=2:12 \end{array}$$

III. Perturbate ex æquo.

1)
$$\begin{array}{ll} a:ma=b:mb & 4:2=12:6 \\ mna:ma=b:\frac{b}{n} & 8:2=12:3 \\ \hline a:mna=\frac{b}{n}:mb. & 4:8=3:6. \end{array}$$

2)

$$2)\ a : ma = b : mb \qquad 4 : 2 = 12 : 6$$

$$ma : mna = \frac{b}{n} : b \qquad 2 : 8 = 3 : 12$$

$$a : mna = \frac{b}{n} : mb \qquad 4 : 8 = 3 : 6.$$

Wenn man ganz verschiedene geometrische Proportionen miteinander multiplicirt oder dividirt; so kommen wiederum geometrische Proportionen heraus, worinnen nur immer gleichnamigte Glieder bey den vier Rechnungsarten verbunden werden.

Es sey gegeben $a : ma = b : mb \qquad 5 : 10 = 2 : 4$

$c : nc = g : ng \qquad 3 : 6 = 4 : 8$

I. Multipl. $ac : mnac = bg : mnbg \qquad 15 : 60 = 8 : 32.$

II. Dividirt $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{g} : \frac{mb}{ng} \qquad \frac{5}{3} : \frac{10}{6} = \frac{2}{4} : \frac{4}{8}$

Wenn die Proportionen einerley Verhältniß haben; so wird noch eine Proportion herauskommen, wenn man die gleichnamige Glieder addirt oder subtrahirt; dann $a : ma = b : mb$

$c : mc = d : md$ giebt

$$a+c : m(a+c) = b+d : m(b+d)$$

$$2 : 4 = 3 : 6$$

$$5 : 10 = 1 : 2$$

$$7 : 14 = 4 : 8.$$

Ist aber die Verhältniß verschieden, so geht die Addition und Subtraction nicht an; die Multiplication und Division hingegen ist in allen Fällen richtig.

Wenn

Wenn bey Proportionen, die in einander multiplicirt werden, zwey nicht homologe Glieder gleich sind: so verhält sich das Product des ersten Paars Glieder zum Product des andern Paars, wie das dritte Glied der ersten zum vierten Glied der andern Proportion.

Es seye $T : t = E : v$

$C : c = v : e$

$CT : tc = Ev : ev$ so ist

$\quad : v$

$CT : tc = E : e.$

Gesetzt nun E und e bedeuten Wirkungen, C und c Ursachen, T und t Zeiten, in welchen die Wirkungen hervorgebracht werden; so werden sich die Wirkungen wie die Producte aus den Zeiten in die Ursachen verhalten: denn wenn die Zeiten gleich sind, so verhalten sich die Wirkungen wie die Ursachen; und wenn die Ursachen gleich sind, wie die Zeiten.

Wenn drey oder mehrere Proportionen ein so gemeinschaftliches Glied haben; so werden die Producte aller ersten Glieder zu den Producten aller zweyten Glieder sich verhalten, wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten der letzten Proportion.

$a : b = g : h$

$c : d = h : q$

$e : f = q : r$

$ace : bdf = ghq : hqr$

$\quad : hq$

$ace : bdf = g : r.$

Diese

Diese Proportion heißt man sonsten die Kettenregel, wie die unmittelbar vorhergehende die Regel Quinque. Sie dienen, besonders die Kettenregel, dazu, daß man einen Begriff von den zusammengesetzten Verhältnissen bekomme, z. E. 3 ist in 12 viermal, und 12 in 60 fünfmal enthalten; folglich ist die Verhältniß von 3 zu 60 aus der Verhältniß von 3 zu 12 und 12 zu 60 zusammengesetzt, das ist, 3 steckt in 60 viermal fünfmal, oder zwanzigmal. Das bisher vorgetragene muß man sich vorzüglich bekannt machen, weil die Lehre von den Proportionen, wie wir schon gemeldt, die Seele der ganzen Mathematik ist.

Vorbereitung zur Regel Detri, wie man das vierte Glied in einer geometrischen Proportion suche,

§. 81. Die bisherige Vorbereitungen werden uns nun das folgende, das manchem so schwer scheinet, erleichtern, und die ganze Lehren von der so genannten Regel Detri und andern Regeln auf wenig Blättern faßlich machen. Dann es ist uns nichts mehr übrig, als daß wir zeigen, wie man in einer geometrischen Proportion das vierte Glied finden solle. Diese Erfindung wird uns zugleich den Weg zu den Eigenschaften der continuirlich-geometrischen Proportionen und sodann auch der Progressionen bahnen. Aus dem vorhergehenden ist klar, daß die Producte der beeden äussersten und mittleren Glieder in einer wahren geometrischen Proportion einander

und durch was für Buchstaben die unbekannte oder gesuchte Grössen angezeigt werden?

ander gleich seyn müssen. Da man nun das vierte Glied erst finden solle, so wollen wir es x oder y nennen, durch welche Buchstaben ohnehin dasjenige, was noch unbekannt ist, und erst erfunden werden solle, nach der Gewohnheit der Algebraisten ausgedruckt wird; und weil die drey ersten Glieder, nemlich a, ma, und b gegeben sind, so setzen wir nur

$a : ma = b : x$, und multipliciren nach §. 79. $ax = mab$, hernach dividiren

$$\frac{ax = mab}{x = \frac{mab}{a}} : a$$

wir beederseits mit a, damit wir die unbekannte Grösse allein bekommen:

Nunmehro wissen wir, wie das vierte Glied heisset, nemlich $\frac{mab}{a}$ oder mb, weil $\frac{a}{a} = 1$, und folglich in dem Ausdruck $\frac{mab}{a}$ hinweg fällt. Das vierte Glied wird also gefunden, wenn man das zweyte und dritte Glied miteinander multiplicirt, und das Product durch das erste Glied dividirt. Es ist zugleich ohne unser Erinnern klar, daß nach eben dieser Regel das erste, oder das zweyte, oder das dritte Glied gefunden werden könne. Dann die Proportionen darf man nach §. 80. versetzen; dahero es gleichviel ist, ob ich sage:

Warum derjenige, der das vierte Glied finden kann, auch eben deßwegen das erste, zweyte oder dritte finden könne, und wie man deßwegen nicht

$x : b = ma : a$ oder

$b : x = a : ma$ oder

$ma : a = x : b$;

Man

Man kann also jedesmal das unbekannte Glied zum vierten und letzten machen, dahero wir in der längstens angenommenen allgemeinen Regel mit Fleiß nichts ändern wollten. Dieser Satz ist das Fundament der ganzen Regel Detri, und aller damit verbundenen Nebenregeln. Eben so kann ich das letzte Glied in einer continuirlichen Proportion finden, wenn ich setze:

Ursach habe, von der gewöhnlichen Regel abzugehen.

$$a : ma = ma : x \quad \text{folglich}$$
$$ax = m^2 a^2 \quad \text{und}$$
$$x = \frac{m^2 a^2}{a} = m^2 a.$$

Denn, weil das zweyte und dritte Glied in dieser Proportion einerley ist, so darf ich es nur doppelt setzen, und die Rechnung auf die obige Regel reduciren, da ich sogleich finden werde, wie das letzte Glied aussehen müsse; es heißt nemlich $m^2 a$; wenn ich also das mittlere in diesem Fall erst finden müßte, und das erste und letzte, nemlich a und $m^2 a$ wären mir gegeben, so setze ich abermal nach meiner Regel:

Wie man das letzte Glied in einer continuirlich geometrischen Proportion, und wie man das mittlere Glied finde?

$$a : x = x : m^2 a, \quad \text{folglich}$$
$$m^2 a^2 = x^2 \quad \text{und durch Ausziehung der Quadratwurzel in blosen Zeichen §. 58.}$$
$$\sqrt{m^2 a^2} = \sqrt{x^2} \text{ das ist}$$
$$m^{\frac{2}{2}} a^{\frac{2}{2}} = x^{\frac{2}{2}} \quad \text{oder}$$
$$a = x.$$

Das zweyte oder mittlere Glied heißt demnach ma; welches abermal nach Anleitung der allgemeinen Regel gefunden worden ist.

Erläuterung in Zahlen.

Zur Erläuterung wollen wir einige Exempel in Zahlen geben. Man solle zu 3, 6, und 4 die vierte Proportionalzahl finden, nach der Regel schreibt man also:

$$3 : 6 = 4 : x$$

$$3 . x = 4 . 6.$$

$$: 3$$

$$x = \frac{4.6}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Demnach ist 8 die vierte Proportionalzahl. Die Probe ist leicht zu machen: 3 ist in 6 enthalten 2mal, und 4 in 8 ist auch zweymal enthalten; oder 3. 8 = 4. 6. Ferner, wenn ich zu 3 und 6 die dritte Proportionalzahl suchen will, so schreibe ich:

$$3 : 6 = 6 : x$$

$$3 . x = 6 . 6$$

$$: 3$$

$$x = \frac{6.6}{3} = 12.$$

Also ist 12 die dritte Proportionalzahl zu 3 und 6, dann 3 : 6 = 6 : 12. Verlange ich endlich zwischen 3 und 12 das mittlere Glied, so ist

$$3 : x = x : 12 \text{ folglich}$$

$$3 . 12 = x^2 \quad \text{und}$$

$$\sqrt{3 . 12} = x.$$

Weil

Weil wir nun noch nicht gezeigt haben, wie man die Wurzeln in Zahlen wirklich ausziehe, ſo laſſen wir es dißmalen bey dem bloſen Zeichen bewenden; unerachtet man im Kopf bey dem gegenwärtigen Exempel leicht ausrechnen kann, was die Wurzel ſeye, dann $\sqrt{3.12} = \sqrt{36} = 6$.

Was die Regel Detri insgemein heiſſe,

§. 82. Wenn man die allgemeine Regel §. 81. auf genannte Zahlen anwendet, und z. E. fraget: 3 Ehlen Tuch koſten 6 fl. was koſten 4 Ehlen von dem nemlichen Tuch? ſo heißt dieſe Anwendung die Regel Detri.

und warum ſie ſo einen weitläufftigen Umfang habe, und nichts deſto weniger von uns ſo kurz und doch vollſtändig vorgetragen werden könne.

Nun begreifft man leicht, daß es eine Menge von Fällen geben muß, worinnen man dieſe Rechnung nöthig hat; dahero man ſich gar nicht wundern darf, wenn man oft ganze Bücher zu ſehen bekommt, welche blos von der Regel Detri handeln. Wir werden ſie aber nach unſerer gegenwärtigen Abſicht um ſo kürzer vortragen dürfen, je weniger wir geſonnen ſind, das praktiſche in dergleichen Materien umſtändlich auszuführen. Eines kann ich nicht ganz übergehen. Der Reeſiſche Name iſt in dieſer Rechnung ſo bekannt geworden, daß es ein Fehler ſeyn könnte, wenn ich ihn nicht nennen würde.

Was die ſogenannte Reeſiſche Regel ſeye;

Man hat die Regel Detri nach der ſchon vorgetragenen Regel §. 81. ſo lange abgehandelt, bis endlich die ſo beliebte Reeſiſche Art, die gegebene und geſuchte Zahlen zu ſetzen, aufgekommen, und von ihrem Erfinder, dem Herrn von Rees, einem

Holländer, den Namen bisher beybehalten hat. Nach derselben schreibt man die Glieder der Proportion so, daß die Factores der zwey gleichen Producte durch einen Vertical-Strich von einander getrennet werden. Z. E.

Allgemeiner Beweis der Reesischen Regel, was die Art die Zahlen zu setzen betrifft.

a	b		a	b
mb	ma	oder	x	ma
amb	bma		ax	mab

Nun siehet jedermann, daß es ganz gleichgültig ist, ob ich die Glieder nach der gewöhnlichen oder nach der Reesischen Methode setze; dann in einem wie in dem andern Fall müssen gleiche Producte herauskommen, und das ist nun der Beweis für die Reesische Rechnung. Man begreifft aber wohl, daß wegen den mannigfaltigen und oft sehr in einander geflochtenen Exempeln viele Sorgfalt und Aufmerksamkeit nöthig seye, damit man die Factores nicht versetze, und was auf die eine Seite gehört, mit der andern nicht verwechsle. Diesen Fehler nun zu vermeiden, hat man je und je zerschiedene neue Setzungsregeln ausgedacht, welche aber oft mehr Ausnahmen leiden, als die grammatische Regeln. Die Hauptsache bestehet darinnen, daß man nach den Proportionsregeln §. 79. 80. handeln, und durch die Uebung so wohl als durch ein geschärftes Nachsinnen alle Glieder, die miteinander multiplicirt werden müssen, sich bekannt mache. Wir wer-

Warum die Anwendung der Reesischen Regel in manchen Fällen noch schwer seye, und den Anfängern oft durch Nebenregeln erleichtert werden müsse.

werden das weitere hievon melden, wenn wir vorhero noch einen andern Fall bey der Reesischen Rechnung bewiesen haben. Es können nemlich die Glieder einer Verhältniß auch Brüche seyn, in welchem Fall die Reesische Regel haben will: man solle auf jeder Seite die Nenner ausstreichen, und selbige hernach als ganze Zahlen der gegenüber stehenden Seite zugeben, und sodann nach der ersten Regel nur Zehler und ganze Zahlen multipliciren. Der Beweis davon ist leicht zu verstehen: Es seye die Proportion,

Beweis der Reesischen Regel in Rucksicht auf die Brüche, und Versetzung ihrer Nenner.

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{f} = \frac{g}{h} : x$$

so hat man nach der gewöhnlichen Manier

$$\frac{a}{c} \cdot x = \frac{bg}{fh} \text{ und}$$

$$x = \frac{bg}{fh} : \frac{a}{c} = \frac{bg}{fh} \cdot \frac{c}{a} = \frac{bgc}{fha} \text{ §. 71.}$$

folglich ist $x = \frac{bgc}{fha}$, und wenn man beederseits mit fha multiplicirt,

$$xfha = bgc.$$

Nach der Reesischen Methode kommt gleiches heraus: dann man schreibt

$$\begin{array}{r|l} \frac{a}{c} & \frac{b}{f} \\ f\ \frac{x}{h} & \frac{g}{h}\ c \end{array}$$

und setzt die ausgestrichene Nenner wechselsweis auf die andere Seite, multiplicirt sodann und bekommt afhx | bcg.

 Da

Da nun, wie wir erwiesen, $afhx = bcg$, so ist, wie oben, $x = \frac{bcg}{afh}$. Nun ist alles bewiesen, was nur immer in der Reesischen Regel zu beweisen war. Der Grund von der letzten Veränderung beruhet darauf: daß die Division der Brüche in eine Multiplication des zu dividirenden Bruchs mit dem umgekehrten Divisor, verwandelt wird, welche gerade durch das Ausstreichen und Versetzen der Nenner sich bewerkstelligen läßt.

§. 83. Jetzo ist noch übrig, daß wir unseren Lesern auch Exempel geben, und die Anwendung dieser Regel zeigen. Zuvor muß ich aber einen sehr fruchtbaren und allgemeinen Satz noch anführen, welchen der in den mathematischen Wissenschaften wohl bewanderte und gelehrte Herr Pastor Flattich ohnelängst an mich überschrieben hat: Er heißt mit einer kleinen Veränderung also: **Alle Theile einer Grösse, wodurch die Grösse bestimmt und determinirt wird, werden in der Regel Detri nach der Reesischen Methode mit einander multiplicirt, oder auf einer Seite den bestimmten Grössen gegenüber gesetzt.** Wer diesen Satz versteht, der wird ohne viele Mühe sogleich wissen, wie er die Zahlen setzen solle. Wir wollen ihn zuerst erklären, hernach beweisen. Die Grösse des Zinses aus einem

Eine höchstbrauchbare Regel, durch deren Beobachtung Glieder nach der Reesischen Methode jedesmal richtig gesetzt werden können.

nem Capital wird durch die Grösse des Capitals und durch die Länge der Zeit, wie lang ichs nemlich ausleihe, bestimmt und determinirt. Wenn also 600 fl. in 6 Jahren 50 fl. Zins oder Interesse eintragen, so frage ich, wie viel Interesse tragen 1600 fl. in 4 Jahren? Weil ich weiß was beederseits für Grössen theils gegeben theils gesucht werden, so darf ich nur die bestimmende Theile dieser Grössen so setzen, daß sie ihren Grössen gegenüber stehen, und sodann unter die zwey gleiche Producte geben: z. E.

Exempel zur Erläuterung der Regel:

I. Exempel von Zinsrechnungen, nach der sonst genannten Regula quinque.

600 fl.	50 fl. Zins
6 Jahr	1600 fl.
x Zins	4 Jahr
6.600.x	4.50.1600.

folglich ist $x = \frac{4.50.1600.}{6.\ 600.}$

Eben so wird die Arbeit der Menschen, z. E. ein Schloßbau oder eine Schanze, bestimmt durch die Zahl der Arbeiter und durch die Länge der Zeit, welche sie auf die Arbeit wenden: Wenn also 200 Soldaten ein Lager innerhalb 24 Tagen zum Nothwehr bevestigen, wie viel braucht man Soldaten, wenn die Arbeit innerhalb 6 Tagen fertig werden solle? Ich setze hier wiederum

II. Exempel von Arbeitern und dem Werk, das sie vollenden sollen, nach der sonst eingeführten Regula trium inversa?

200 Soldaten	1 Schanze
24 Tag	x Soldaten
1 Schanze	6 Tagen
200. 24 =	6. x

folglich $\frac{200.\ 24}{6} = x$ Soldaten.

Aus

Aus diesem Exempel siehet man, daß man keine umgekehrte Regel Detri (regulam trium inversam,) nöthig hat; indeme die ganze Rechnung nach der allgemeinen Regel sich richtet, wenn man nur genau auf alles dasjenige Achtung giebt, was zur wirklichen Bestimmung einer Grösse, oder hier zur Vollendung einer Arbeit, für Theile und Umstände nöthig sind.

welche man aber bey dieser Methode gar nicht nöthig hat.

Noch einige andere Exempel,

Eben so antwortet man auf die Frage: wenn acht Personen, deren jegliche täglich drey Quart Wein trinken, innerhalb 28 Tagen ein Faß Wein austrinken; wie bald wird das Faß leer werden, wenn täglich 12 Personen daraus trinken, und jegliche 2 Quart trinket? Die Ausleerung des Fasses wird bestimmt durch die Anzahl der Trinker, durch den täglichen Trank eines jeden, und durch die Anzahl der Tage, wie lang sie trinken; diese sämtliche Theile bestimmen die Grösse, dahero werden sie mit einander multiplicirt und nach der Reesischen Methode folgender massen gesetzt:

{ 8 Person.	ausgeleer-
{ 3 Quart.	tes Faß,
{ 28 Tag.	12 Person. }
ausgeleer-	2 Quart. }
tes Faß.	x Tagen. }

$8.3.28 = | 12.2.x$ folglich

$$\frac{8.3.28}{12.2} = x. \text{ Tagen.}$$

Die

Die Exempel mit Brüchen werden eben so behandelt: wenn z. E. 8 Ehlen $\frac{6}{4}$ breit Tuch ein Kleid geben; so fragt sichs, wie viel man Ehlen brauche, wenn das Tuch nur $\frac{5}{4}$ breit ist? Es ist klar, daß das Kleid durch die Länge und Breite des Tuchs bestimmt wird; darum multiplicirt man diese Theile miteinander und setzt

besonders auch mit Brüchen.

8 Ehlen lang, $\frac{6}{4}$ breit.	1 Kleid. 4.
4, 1 Kleid.	x Ehlen, $\frac{5}{4}$ breit

$$8.6.4 = 5.4.x. \text{ folglich } \frac{8.6.4.}{5.4.} = x \text{ Ehlen.}$$

§. 84. Man bringt aber auch die so genannte welsche Practik dabey an, welche weiter nichts ist, als die Kunst, eine Verhältniß kürzer auszudrucken. Die meisten geben hier wiederum besondere Regeln, welche man vor der wirklichen Multiplication noch beobachten soll. Allein da wir die Multiplication durch Zeichen nur anzeigen, so ist es weit schicklicher, daß man diese Verkürzung erst am Ende der Rechnung anbringt, weil man hierzu keine weitere Regeln nöthig hat, und die ganze Arbeit nur auf das, was wir §. 66. gesagt haben, reduciren darf. Z. E. in der letzten Aufgab habe ich

Wie man die welsche Practik anbringe, und warum man sie am besten zuletzt nach geschehener Berechnung, die aber nur durch Zeichen ausgedruckt wird, anbringen könne?

$x = \frac{8.6.4}{5.4}$ das ist, weil 4 in 4 einmal enthalten ist, folglich gegen einander

aufgehoben wird, $x = \frac{8.6}{5}$. Auf gleiche Weise verfähret man bey andern Exempeln; nur muß man immer die Hauptregel befolgen, daß man nemlich alle zugleich bestimmende Theile einer Grösse untereinander auf eben derselben Seite setzet u. s. w. Die übliche Reesische Regel heißt zwar also: Man setze die gegebene Zahlen so, daß auf beyden Seiten gleiche Namen zu stehen kommen. Allein es giebt Exempel, wobey nicht allemal zween gleiche Namen vorkommen: folglich würde die Regel in diesem Fall schon eine Ausnahme leiden. Unsere obige erste Regel hingegen ist dieser Gefahr nicht ausgesetzt. Der Beweis davon ist übrigens faßlich genug: dann die bestimmende Theile sind allemal der ganzen Grösse proportionell; folglich müssen sie auf der gegenüber stehenden Seite zusammen gesetzt werden. Weil nun kraft der Natur der Regel Detri die äussere und mittlere Glieder miteinander multiplicirt werden, so ist klar, daß auch diese bestimmende und determinirende Theile, jegliche auf der ihnen angewiesenen Seite, multiplicirt werden müssen. Die herauskommende zwey gleiche Producte werden hernach so behandelt, daß die bekannte Factores desjenigen Products, in welchem das x enthalten ist, das andere Product dividiren, damit man x allein bekomme. §. 9. Nun ist

Vortheile der obigen Regel, die Glieder zu sezen, nebst ihrem Beweis.

iſt alles geſagt, was zur Regel Detri gehört. Dann daß man, wo ungleiche Benennungen z. E. Gulden und Kreutzer vorkommen, alles vorher unter einerley Benennung bringen müſſe, werden unſere Leſer ſich leicht vorſtellen können, wenn ſie das zweyte Capitel von den vier Rechnungsarten geleſen haben. Eben ſo will ich auch nicht erſt erinnern, daß man bey Geſellſchafts-Gewinn- und Verluſtrechnungen u. ſ. w. die Regel Detri etlichmal anbringen müſſe; man mag die Reeſiſche oder eine andere Methode ſich bekannt gemacht haben. Denn wenn z. E. 3 Perſonen mit 1800 fl. 2000 fl. gewonnen haben, und die erſte 1000, die andere 500, die dritte 300 eingelegt hatte, ſo heißt es eben: 1800 fl. gewinnen 2000, wie viel gewinnen die eingelegte tauſend der erſten Perſon? ferner 1800 gewinnen 2000, wie viel gewinnen die eingelegte 500 fl. der zweyten Perſon? und endlich 1800 fl. gewinnen 2000 fl. wie viel gewinnen die eingelegte 300 fl. der dritten Perſon daran? u. ſ. w. Was endlich die Brüche betrifft, ſo werden am Beſchluß der Rechnung auch dieſe in die gewöhnliche Zahlnamen verwandelt. Man ſagt z. E. bey uns nicht $\frac{3}{4}$ fl, ſondern 45 kr. wenn alſo ein ſolcher Ausdruck vorkommt, ſo muß man ihn in einen andern verwandeln, der in dem Lande, wo man lebt, üblich iſt. Das geſchiehet nun durch die Regel Detri;

Einige Nebenumſtände der Regel Detri, der Geſellſchafts- Verluſt- und Gewinnrechnung u. ſ. w. werden kürzlich berührt.

Wie man die am Ende der Rechnung zuweilen angehängte Brüche unter andere Benennungen bringe, und z. E. die Brüche der Gulden in Kreutzer verwandle.

tri; dann der Ausdruck $\frac{3}{4}$ fl. muß allemal dem Ausdruck $\frac{x}{60}$ fl. gleich seyn, weil 60 kr. einen Gulden ausmachen. Es kommt also nur darauf an, daß wir x oder den Zehler zu dem Nenner 60 finden. Das ist nun bald geschehen; dann $\frac{3}{4}$ fl. $= \frac{x}{60}$ folglich $4 : 3 = 60 : x$ und also $x = \frac{3.60}{4}$; oder wenn wir für 3 den Buchstaben a und für 4 den Buchstaben b setzen, so wird in allen solchen Fällen herauskommen $\frac{a}{b}$ fl. $= \frac{x}{60}$, oder $b : a = 60 : x$, und $x = \frac{60.a}{b}$. Die allgemeine Regel wird also die folgende seyn: man multiplicirt den Zehler eines solchen Bruchs mit 60, und dividirt das Product mit dem Nenner, der Quotient wird Kreutzer geben. Wenn man im Früchtenmaas für 60 setzet 8, weil 8 Simri bey uns auf einen Scheffel gehen, oder im Weinmaas 16, weil 16 Imi einen Aymer machen, u. s. w. so wird die Regel noch allgemeiner werden können. Wir haben von der Regel Detri fast mehr gesagt, als wir anfänglich gesonnen waren. Wer aber dem ungeachtet doch noch weitere Anwendungen und Exempel verlangen sollte, der wird sie in des gelehrten Hrn. Pastor Engelhards

ohne-

ohnelängst herausgegebenen Rechenkunst nach der Reesischen Regel, umständlich finden.

§. 85. Wann mehrere continuirliche Proportionen also zusammen gesetzet werden, daß sich das erste Glied zum zweyten verhält, wie das zweyte zum dritten, und das zweyte zum dritten, wie das dritte zum vierten, und das dritte zum vierten, wie das vierte zum fünften, u. s. w. so entstehet eine Progression, welche entweder geometrisch oder arithmetisch ist, je nachdem die Verhältniß der Glieder geometrisch oder arithmetisch ist. Die geometrische wollen wir zuerst betrachten, weil sie gemeinnütziger und in der Hauptsache auch nicht schwerer sind, als die arithmetische. Nun kann eine geometrische Proportion entweder immer steigen, oder immer abnehmen; im ersten Fall heißt sie eine divergirende, im zweyten eine convergirende Progression. Wie ferne man etwas ähnliches bey den arithmetischen Progressionen beobachten könne, werden wir im folgenden zeigen. Eine geometrische Progression ist demnach a, ma, m^2a, m^3a, m^4a u. s. w. Denn $a : ma = ma : m^2a$, und $ma : m^2a = m^2a : m^3a$, und $m^2a : m^3a = m^3a : m^4a$, wie man aus der §. 81. vestgesetzten Regel leicht ersehen wird. Dieser allgemeine Ausdruck läßt sich nun auf allerhand Exempel in Zahlen anwenden: denn wenn $a = 1$ und $m = 2$,

Was Progressionen seyen, und wie sie eingetheilt werden,

Allgemeiner Ausdruck für die geometrische Proportionen,

wird durch Exempel in Zahlen erläutert.

so

so wird die Progression heissen:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. w.

ist $m = 3$, so heißt die Progression

1, 3, 9, 27, 81, 243, u. s. w.

Eigenschaften der geometrischen Progressionen.

Wenn $m = \frac{1}{2}$ so giebt es folgende Progression: 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ u. s. w. Nun kann man aus dem blosen Anschauen dieser Progressionen mit Vergleichung der Proportionsregeln bald auf eine Eigenschaft schliessen, welche eine von den ersten ist, die man sich in dieser Materie bekannt machen muß. Wir wollen setzen: die Progression gehe mit dem fünften Glied aus; in welchem Fall sie also aussiehet:

$$a, ma, m^2a, m^3a, m^4a;$$

Wenn ich nun das erste und letzte Glied mit einander multiplicire, so bekomme ich das Product m^4a^2; multiplicire ich das zweyte und uneins letzte, nemlich ma mit m^3a, so bekomme ich wieder m^4a^2; multiplicire ich das dritte von vornen, und das dritte von hinten an gerechnet, das ist, im gegenwärtigen Fall, das mittlere mit sich selbst, so bekomme ich noch einmal m^4a^2; ich mache daher den richtigen Schluß, daß in

Die Produkte der äussersten und von den äussersten beederseits gleich weit abstehenden

einer geometrischen Progression die Producte der beeden äussersten Glieder, und die Producte aller von den äussersten beederseits gleich weit abstehenden Glieder einander gleich seyen; folglich wenn die Anzahl der Glieder ungleich z. E. 5, 7, 9, 11 u. s. w. ist,

so

so wird das Quadrat des mittelsten Gliedes dem Product der beeden äussersten u. s. w. gleich seyn. Die Probe kann man leicht in Zahlen machen. Z. E.

Glieder sind allemal einander gleich.

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$$
$$\frac{4}{16}\quad\frac{2}{16}\quad\frac{1}{16}$$

Eben so sehe ich in meiner obigen Progression, daß die letzte Dignität von m allemal um eins weniger ist, als die Anzahl der Glieder; die Progression hat 5 Glieder, und der Exponent von m im letzten Glied ist 4; er wäre 5, wenn die Progression 6 Glieder hätte, und 6, wenn sie sieben hätte, denn man darf nur fortfahren und schreiben

$$a,\ ma,\ m^2a,\ m^3a,\ m^4a,\ m^5a,\ m^6a,$$
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

Folglich kann ich wiederum einen allgemeinen Ausdruck für die geometrische Progressionen finden, wenn ich die Zahl der Glieder n nenne. Dann in diesem Fall wird das letzte Glied allemal seyn $m^{n-1}a$, und das uneins letzte $m^{n-2}a$, das dritte von hinten $m^{n-3}a$ u. s. w. Dahero wird die obige Progression, wenn ich sie umgekehrt schreibe, folgende Gestalt bekommen:

Noch ein allgemeinerer Ausdruck für die geometrische Progressionen wird angeführt und erwiesen.

$$m^{n-1}a,\ m^{n-2}a,\ m^{n-3}a,\ m^{n-4}a,\ m^{n-5}a,$$
$$m^{n-6}a \text{ u. s. w.}$$

Wenn einem also die Anzahl der Glieder und der Exponent m gegeben wird, so läßt sich, woferne a immer = 1, das letzte Glied ohne Mühe finden. Dann die Anzahl der Glieder = n solle 5 und m = 2 seyn, so

Wie man das letzte Glied einer geometrischen Progression finde;

ist das letzte Glied = $m^{n-1}a = 2^{5-1} = 2^4 = 16$.

§. 86. Nunmehro können wir eben diejenige Aufgaben vollends finden, welche wir in der Lehre von den Proportionen gefunden haben. Wir haben schon gezeigt, wie wir das letzte Glied finden sollen. Es lassen sich aber auch nicht nur die mittlere Glieder finden, sondern auch das erste, und selbst das letzte kann noch auf andere Weisen gefunden werden. Das den Alten so schwer gefallene Problem zwischen zwo gegebenen Zahlen zwo andere continuirlich proportionelle zu finden, solle jetzo zuerst vorgetragen werden. Wir wollen es noch allgemeiner machen, und sagen: man solle zwischen zwo gegebenen Zahlen so viel mittlere Proportionalzahlen suchen als man wolle. Die zwo gegebene Zahlen werden also das erste und letzte Glied der Progression seyn, weil die gesuchte mittlere Proportionalzahlen allesamt dazwischen hineinfallen. Weil sie uns nun beede gegeben sind, so wollen wir sie a und b nennen, nemlich das erste a und das letzte b. Ferner muß man einem sagen, wie viel man mittlere Proportionalzahlen verlange, das ist, ob man 3, 4, 5, 6 u. s. w. zwischen a und b suchen solle? folglich muß einem die Zahl der gesuchten Glieder auch gegeben werden; sie solle 4 seyn. Das erste von den unbekannten Gliedern wollen wir, nach der Gewohnheit der Mathematikverständigen

Wie man die schwere Aufgabe von Erfindung zweyer mittlern Proportionalzahlen leicht auflösen könne;

Allgemeine Auflösung, nach welcher gezeigt wird, wie man zwischen zwo gegebenen Zahlen so viel

gen, x nennen; folglich wird die Progreſ- sion heiſſen.

$$a,\ x,\ \frac{x^2}{a}\ \frac{x^3}{a^2}\ \frac{x^4}{a^3}\ b.$$

Denn nach ſ. 81. müſſen wir folgende Proportionen, die Glieder ausdrucken zu können, niederſchreiben:

$$a : x = x : \frac{x^2}{a} \text{ drittes Glied}$$

$$x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : \left(\frac{x^4}{a^2} : x\right) = \frac{x^3}{a^2} \text{ viertes Glied}$$

$$\frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2} = \frac{x^3}{a^2} : \left(\frac{x^6}{a^4} : \frac{x^2}{a}\right) = \left(\frac{x^6}{a^4} \cdot \frac{a}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x^6 a}{a^4 x^2} = \frac{x^4}{a^3} \text{ fünftes Glied. ſ. 71.}$$

Folglich iſt die Progreſſion nochmalen rich- tig geſetzt, wenn man ſchreibt

$$a,\ x,\ \frac{x^2}{a},\ \frac{x^3}{a^2},\ \frac{x^4}{a^3},\ b.$$

Demnach müſſen auch die Producte der beeden äuſſerſten und von den äuſſerſten gleich weit abſtehenden Glieder einander gleich ſeyn, folglich

mittlere Proportional- zahlen finden könne, als man nur immer ver- langet.

$$ab = x \cdot \frac{x^4}{a^3}, \text{ das iſt}$$

$$ab = \frac{x^5}{a^3}$$

$$\overline{} : a^3$$

$$a^4 b = x^5$$

$$\overline{} : \sqrt{}$$

$$\sqrt[5]{a^4 b} = x.$$

 Alſo

Also wird das zweyte Glied seyn die Wurzel der fünften Potenz aus dem Product des letzten Glieds in das zur vierten Dignität erhobene erste Glied. Wann nun $a = 1$, und $b = 243$, so ist $x = \sqrt[5]{243} = 3$; folglich heißt die Progression

1, 3 9, 27, 81, 243.

Die Auflösung dieser Frage wird noch allgemeiner gemacht.

Man kann die Auflösung noch allgemeiner machen, wenn man die Anzahl der gesuchten mittleren Glieder n nennet; denn in diesem Fall sehe ich schon, wie die Progression fortgehen müsse, indeme das letzte der gesuchten Glieder $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ und folglich das letzte in der ganzen Progression, welches wir als ein gegebenes Glied b nannten, durch einen andern Ausdruck $\frac{x^{n+1}}{a^n}$ heissen wird, weil in der Progression

$$a, x, \frac{x^2}{a} \frac{x^3}{a^2} \frac{x^4}{a^3} \text{———} \frac{x^n}{a^{n-1}} \frac{x^{n+1}}{a^n}$$

der Exponent des Nenners allzeit um eins weniger ist als der Exponent des Zehlers: Da nun das letzte Glied gegeben, und b genannt wurde, so ist

$$b = \frac{x^{n+1}}{a^n} \text{ folglich}$$

$$\text{—————} \cdot a$$

$$ab = \frac{ax^{n+1}}{a^n} \text{ das ist}$$

ab

$$ab = \frac{x^{n+1}}{a^{n-1}} \text{ §. 57.}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot a^{n-1}$$

$$a^{n-1}ab = x^{n+1}$$
$$a^{n}b = x^{n+1} \text{ das ist nach §. 49.}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \sqrt[n+1]{}$$

$$\sqrt[n+1]{a^{n}b} = x.$$

Sollte jemand bey dieser Rechnung sich nicht mehr besinnen können, warum z. E. $\frac{a}{a^n} = \frac{1}{a^{n-1}}$ so darf er nur im Sinn für n eine Zahl z. E. 4 setzen, so wird er haben $\frac{a}{a^4} = \frac{1}{a^{4-1}}$ Nun ist $\frac{a}{a^4} = \frac{a}{aaaa}$, das ist, wenn man wirklich dividirt $\frac{1}{aaa}$ §. 57. folglich $\frac{a}{a^4} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{4-1}}$. Eben so geht es mit $a^{n-1}\,ab = a^{n}b$; dann n sey abermal 4, so wird man haben $a^{4-1}ab = a^{4}b$; die Ursache ist leicht aus §. 49. begreifflich. Es ist ja $a^{4-1}\,ab = a^{3}ab = aaaab = a^{4}b$, wie es in der angezogenen Stelle umständlich bewiesen ist. Wir haben diesen Ausdruck mit Fleiß noch einmal erläutert, weil ungemein viel daran gelegen ist, daß man ihn wisse, und fertig einsehen lerne.

Erklärung einiger schwer scheinenden Gleichungen, die bey dieser Rechnung vorkommen.

§. 87. Ehe wir zeigen, wie die Summe einer geometrischen Progression gefun-

Exempel zur Uebung, wie man aus gewissen gegebenen Stücken einer geometrischen Progression ihr erstes und letztes Glied finden könne;

den werde, wollen wir noch zur Uebung ein leichtes Exempel hersetzen, welches uns lehret, wie man aus gewissen gegebenen Stücken der Progression ihr erstes und letztes Glied finde. Die gegebene Stücke sollen seyn:

I. Das Product oder Factum der beeden äussersten Glieder, welches wir nennen wollen $= f$

II. Die Anzahl der Glieder $= n$

III. Die Grösse der Verhältniß, oder der Exponent. $= m$

Nun solle man finden das erste Glied $= x$ und das letzte $= y$.

Man wird leicht begreiffen,

daß $f = xy$ folglich

$\frac{f}{x} = y$ da nun auch §. 85.

$m^{n-1}x = y$ so ist §. 9.

$\frac{f}{x} = m^{n-1}x$ und

$\cdot x$

$f = m^{n-1}x^2$ folglich

$: m^{n-1}$

$\frac{f}{m^{n-1}} = x^2$ und

$: \sqrt{}$

$\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{m^{n-1}}} = x.$

Also hat man das erste Glied in lauter bekannten Grössen gefunden. Wenn es nun

mit

mit m^{n-1} multiplicirt wird, so hat man auch das letzte Glied; welches ebenfalls gefunden wird, wenn man das gegebene Factum durch das bereits gefundene erste Glied dividirt. Wer Exempel in Zahlen nachmachen will, der wird eine gute Uebung seiner Rechenkunst haben.

Was man zu wissen nöthig habe, wenn man die Summe einer geometrischen Progression finden solle,

§. 88. Die Summe einer geometrischen Progression läßt sich finden, wenn man nur das erste und letzte Glied und den Namen der Verhältniß weiß. Die Art und Weise selbst, wie man aus diesen gegebenen Stücken die Summe findet, können wir nicht faßlich genug vortragen, es sey dann, daß wir unsere Leser zuvor an die umständlich beschriebene Art mit Buchstaben in allerhand Dignitäten zu dividiren erinnern und zuruck denken heissen. Wenn sie z. E. $m^{n-1}a$ durch m wirklich dividiren sollten, wie würden sie es angreiffen, damit der Quotient $m^{n-2}a$ u. s. w. herauskomme? Man darf nur n als eine Zahl z. E. 4 sich vorstellen; so wird $m^{n-1}a = m^{4-1}a = m^3 a = mmma$; diese Grösse durch m dividirt gibt mma, das ist m^2a, und wenn ich den obigen Exponenten 4 gern beybehalten wollte, $m^{4-2}a$; folglich im allgemeinen Ausdruck, wenn ich für 4 das erste n wieder setze, $m^{n-2}a$. Multiplicirt man nun diesen Quotienten mit dem Divisor m, so hat man $mm^{n-2}a$. das ist $m^{n-1}a$, welches die zu dividirende Grösse war. Denn wenn ich für n wie-

und wie man die wirkliche Division der Buchstaben durch zusammengesetzte Divisores zu diesem Vorhaben brauchen und wiederholen müsse.

der 4 setze, so ist $mm^{4-2}a = mm^2 a = m^3 a = m^{4-1}a$; das ist die obige zu dividirende Grösse. Jetzo können wir die Summe der geometrischen Progression suchen. Das erste Glied seye a, die Zahl der Glieder n, der Name der Verhältniß m, so ist das letzte Glied bekannter massen $m^{n-1}a$; nun wollen wir von diesem letzten Glied das erste subtrahiren, so wird die Differenz seyn $m^{n-1}a - a$, diese Differenz läßt sich vielleicht mit dem um Eins verringerten Namen der Verhältniß, das ist, mit $m - 1$ schicklich dividiren; wir versuchen es wenigstens, und sehen, was herauskommt: es seye also:

wirkliche Auflösung der Frage, wie man die Summe einer geometrischen Progression finden solle.

$$m^{n-1}a - a(m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + a + m^{n-5}a$$

$$\begin{array}{l} (m-1) \\ \quad m^{n-1}a - m^{n-2}a \\ \hline \quad + m^{n-2}a - a \\ (m-1) \\ \quad m^{n-2}a - m^{n-3}a \\ \hline \quad + m^{n-3}a - a \\ (m-1) \\ \quad m^{n-3}a - m^{n-4}a \\ \hline \quad + m^{n-4}a - a \\ (m-1) \end{array}$$

u. s. w.

Aus dem obigen Quotienten sehe ich schon, wie die Glieder fortgehen; wenn ich nun weiß, wie groß n ist, so wird sich die Division endigen. Z. E. n seye 5; so ist $m^{n-5}a = m^{5-5}a = m^0 a = a$; also das

erste

erste Glied. Wäre aber n eine unendlich grosse Zahl, so würde die Division auch ins unendliche fortwähren, und in diesem Fall nichts für die Erfindung der Summe gewonnen werden. Folglich ist die Rede hier nur von endlichen Summen. Bey diesen giebt nun, wie es der Augenschein lehrt, der Quotient alle Glieder, §. 85. ausgenommen das letzte: wenn ich also zum Quotienten das gegebene letzte Glied vollends addire, so habe ich die ganze Summe der geometrischen Progression, welche nach dem gegebenen Beweis folgender massen ausgedruckt werden kann:

$$\frac{m^{n-1}a - a}{m - 1} + m^{n-1}a.$$

Dieser Ausdruck läßt sich schicklicher und kürzer schreiben, wenn man das zweyte Glied als einen Bruch, dessen Nenner eins ist, ansiehet, und hernach alles unter einerley Benennung bringt; da es dann heißt

Wie man die gefundene Regel schicklicher ausdrucken

$$\frac{m^{n-1}a - a + m^n a - m^{n-1}a}{m - 1}$$

das ist, wenn man plus und minus in den beeden gleichen Grössen gegen einander aufhebt, $\frac{m^n a - a}{m - 1}$. Nach der ersten Gleichung wird also die Summe einer geometrischen Progression gefunden, wenn man die Differenz des letzten und ersten Gliedes durch den um eins vermin-

und auch wirklich in Worte verfassen könne;

minderten Exponenten dividirt, und zum Quotienten das letzte Glied addirt. Die Rede aber ist, wie wir schon gemeldet, von endlichen Progressionen; dahero unsere gegebene Regel auf unendliche Reyhen nicht angewandt werden kann. Weil sich aber doch manche ins unendliche fortgehende Progressionen summiren lassen, so wollen wir auch von diesen noch etwas melden.

auf was für Fälle die gegebene Regel sich anwenden lasse.

§. 89. Wenn man sagt, daß unendliche Reyhen sich summiren lassen, so ist leicht begreifflich, daß die Glieder solcher Reyhen immer abnehmen oder kleiner werden, folglich sich zuletzt in Brüche verliehren müssen, deren Nenner unendlich groß sind; sonst wäre es eine pure Unmöglichkeit, die Summe davon in endlichen Zahlen zu geben. Nun wissen wir aus dem dritten Capitel schon, daß eine unendliche Reyhe von Brüchen entstehe, wenn man die Brüche $\frac{a}{b-c}$ und $\frac{a}{b+c}$ durch die wirkliche Division in ihren Quotienten verwandelt; so haben wir gefunden, daß

Ob und wie man ins unendliche fortgehende Progressionen und Reyhen summiren könne?

und wie in diesem Fall die Glieder der Progression Brüche seyn müssen, deren Nenner zuletzt unendlich groß werden.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \text{ u. s. w.}$$

Nunmehro aber wollen wir von dieser Aufgabe gleichsam nichts wissen, und einen andern Versuch wagen, welcher darinnen besteht, daß man eine unendliche Reyhe summiren solle, wenn man auch nicht wüßte, durch was für eine Division sie entstanden seye. Man gebe uns also etliche Progressionen von Brüchen, deren Zehler allesamt eins

sind,

sind, und deren Nenner in einer geometrischen Progression fortgehen; der allgemeine Ausdruck für diese Gattung von Progressionen wird demnach seyn:

Einige Gattungen solcher Progressionen werden angeführt; Erster Fall, wann der Zehler immer eins, und die Nenner in einer geometrischen Progression wachsen, aber so, daß die Zeichen immer plus sind.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}+\frac{1}{a^6} \text{ u.s.w.} = S,$$

wann nemlich S die zu suchende Summe bedeutet. Nun multiplicire man beederseits mit a; so hat man

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \text{ u. s. w.} = aS.$$

Ferner subtrahire man beederseits eins, so hat man wieder die erste Progression

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \text{ u.s.w.} = aS-1.$$

Da nun $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}$ u.s.w. $=S$

so ist $aS-1=S$

$1=1$

$aS=S+1,$

$S=S$

$aS-S=1.$ Das ist, schicklicher ausgedruckt §. 60.

$(a-1)S=1$

$S=\frac{1}{a-1}$ folglich wenn beederseits mit $a-1$ dividirt wird,

Wenn also $a=2$, so ist die Summe =

$= \frac{1}{2-1} = 1$; wenn $a = 3$, so ist die Summe $\frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$; wenn $a = 4$, so ist die Summe $\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$ u. s. w.

Zweyter Fall, wenn die Zeichen plus und minus abwechseln.

Der andere Fall ist, wenn die Zeichen plus und minus abwechseln, z. E. es sey

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u.s.w.} = S$$

$$\overline{} : a$$

$$1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} = aS$$

Diese Gleichung ist eben so wahr, wenn die Zeichen verändert werden, und es hernach heisset

$$-1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} = -aS,$$

folglich wenn beederseits eins addirt wird:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \text{ u. s. w.} = 1 - aS,$$

da nun

$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}$ u.s.w. $= S$ gesetzt wurde, so ist §. 9.

$1 - aS = S$, und wenn man beederseits aS addirt;

$aS = aS$

$1 = S + aS$, oder schicklicher ausgedruckt §. 60.

$1 = (1 + a)S$

folglich

$$\overline{} : 1 + a$$

$$\frac{1}{1+a} = S.$$

Wenn

Wenn also $a = 2$, so ist bey abwechselnden Zeichen die Summe der Progression $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$; ist $a = 3$, so wird die Summe seyn $\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$ u. s. w. Es ist ohne unser Erinnern klar, daß in beeden Fällen der Ausdruck noch allgemeiner werden könne, wenn man statt des Zehlers einen Buchstaben z. E. n setzt, der aber die ganze Reyhe hindurch unverändert bleibt; in welchem Fall die Summe bey einerley Zeichen heissen wird $\frac{n}{a-1}$, und bey abwechselnden $\frac{n}{a+1}$; denn es seye

Allgemeinere Auflösung der beeden angeführten Fälle, der Zehler mag hernach eins oder eine andere Zahl seyn, wenn sie nur nicht verändert wird.

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} + \frac{n}{a^4} = S$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \cdot a$$

$$n + \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} = aS$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; n \text{ subtr.}$$

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} \text{ u. s. w.} = aS - n.$$

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} = S$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \text{ folglich}$$

$$aS - n = S.$$

$$n = n$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

aS=S

$$aS = S + n$$
$$S = S$$
$$aS - S = n$$
$$(a-1)S = n$$
$$S = \frac{n}{a-1}$$

folglich §. 60.

welches der kurze Ausdruck war. Endlich ist vorhin klar, daß zu dergleichen Summen die ganze Zahlen addirt werden müssen, wenn nemlich vor dem ersten Bruch solche stehen; z. E. wenn die Progression mit 1 anfienge,

Was zu thun seye, wenn vor dem ersten Bruch eine oder mehr ganze Zahlen in geometrischer Progression vorangehen, und wie man auch dißfalls die Summe finden könne.

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

Oder wenn eine wirkliche Progression in ganzen Zahlen voran gienge; welche man, wenn sie nur nicht unendlich groß ist, nach §. 88. summirt, und hernach zur Summe der Progression in Brüchen addirt.

Ob und wie ferne man auch andere solche unendliche Progressionen summiren könne, deren Nenner nach einem andern und mehr verborgenen Gesetze sich richten.

§. 90. Ausser diesen Progressionen, die nach einem beständigen und leicht in die Augen fallenden Gesetze sich richten, gibt es noch andere, welche zwar auch eine Regel haben, die aber so verdeckt ist, daß man sie nicht so bald einsiehet. Z. E.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7}, + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} \text{ u. s. w.}$$

ist eine wahre Progression, deren Summe = 1. Die Regel, wornach sie sich richtet, ist sehr verborgen. Sie heißt aber so: wenn man die Nenner der Brüche um eins vermehrt, so sind es Potenzen;

$3 + 1 = 4 = 2^2$; $7 + 1 = 8, = 2^3$
$8 + 1 = 9 = 3^2$ $15 + 1 = 16 = 2^4$
u. s. w.

u. s. w. folglich läßt sich ein jedes Glied durch den allgemeinen Ausdruck bestimmen $\frac{1}{m^{n}-1}$. Allein damit wollen wir uns jetzo nicht aufhalten. Die Rechnung selbst, aus welcher erhellet, daß die ganze Summe = 1 seye, ist etwas groß und weitläuftig, unerachtet sie übrigens nicht schwer ist. Wir würden sie aber dennoch ganz hersetzen, wenn die Kunst dergleichen Progressionen zu summiren, von so grossem Gewichte wäre. Sie ist nicht so gemeinnützig als andere nöthigere Stücke der mathematischen Wissenschaften. Neben dem kann man sich viele Mühe und Arbeit versparen, wenn man bey dergleichen Aufgaben die Fluxionen-Rechnung, oder die Differential und Integral-Rechnung, zu Hülfe nimmt, wie wir an seinem Ort zeigen werden.

Warum man diese Frage mit keinen umständlichen Exempeln beleuchte.

Eines muß ich noch, ehe ich die arithmetische Progressionen erläutere, meinen Lesern vorhalten. Man darf sich nicht irre machen lassen, wenn man hie oder da auch von Gelehrten paradoxe Sätze höret, dergleichen Guido Grandus festgestellt, indeme er behauptet, das unendliche in der Mathematik habe eine Kraft, aus nichts etwas zu machen, und eine Summe von unendlich vielen Nullen in eine wirkliche positive Grösse zu verwandeln. Man muß die Lehre von dem unendlichen vorhero in der philosophischen Schule in Rucksicht auf das sogenannte un-

Was von der Meynung dererjenigen zu halten, welche, wie Guido Grandus, so viel paradox scheinende Sätze in der Lehre von den unendlichen Reyhen sich vorstellen und behaupten.

end-

endliche untersuchet haben, sonst wird man sich bald verwirren und auf irrige Begriffe gerathen. Eine von den besten Schriften in dieser Art ist des berühmten Herrn Prof. Ploucquet Methodus tractandi infinita. Was aber die von den unendlichen Reyhen hergenommene Einwendungen, und besonders die Meynung des Grandus betrifft; so hat der berühmte Hr. Prof. Kästner umständlich in seiner Diss. de lege continuitatis darauf geantwortet. Denn die unendliche Reyhen sind entweder convergirend oder divergirend: im ersten Fall wird das letzte Glied so klein werden, daß es für nichts zu achten; im letztern Fall aber werden die Glieder, je weiter sie vom ersten abstehen, immer grösser. Da nun beede Reyhen durch die Division von $\frac{n}{a-1}$ oder $\frac{n}{a+1}$ entstehen können; bey einer wahren Division aber der Rest zum Quotienten noch beygesetzt werden muß, auch bey einer Division, die ins unendliche gehet, eben deßwegen, weil sie nie aufhöret, immer ein Rest übrig bleibt: so muß man ja bey solchen Reyhen, um den wahren Werth des Quotienten zu haben, noch immer einen Rest hinzudenken. Z.E. wenn ich sage $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 = x^3$, so muß ich zum Quotienten den Rest $\frac{x^4}{1-x}$ noch addiren, woferne ich nicht fehlen will;

und wie man dergleichen Leute theils durch die Grundsätze der Philosophie, theils durch eine genaue Beobachtung und Erklärung der Divisions-Regeln, worauf dergleichen unendliche Reyhen beruhen, wieder zurecht weisen müsse.

wollte

wollte ich bey x^{1000} aufhören, ſo müßte ich den Reſt $\frac{x^{1001}}{1 - x}$ noch addiren u. ſ. w. Eben ſo muß ich bey dem Ausdruck $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. ſ. w. immer noch den zu dividirenden Reſt $+ \frac{1^{00}}{1+1}$ addiren, ſollte ich auch ins unendliche fort dividiren können. Folglich iſt wirklich $\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$ oder $= 1 - \frac{1}{2}$; nemlich mit dem zum Quotienten geſchlagenen Reſt, welchen man niemalen weglaſſen darf, wenn man den Quotienten richtig haben und in ſeiner Berechnung nicht fehlen will. Eben von dieſer Materie habe auch vor mehrern Jahren ſchon in meiner Lettre ſur quelques paradoxes du Calcul analytique das weitere vorgetragen und ausgeführet.

Wie eine arithmetiſche Progreſſion entſtehe, und was ſie ſeye.

§. 91. Arithmetiſche Progreſſionen entſtehen, wenn man continuirlich arithmetiſche Proportionen ſo zuſammen ſetzet, daß nicht nur das erſte Glied zum zweyten ſich verhält wie das zweyte zum dritten, ſondern auch das zweyte zum dritten wie das dritte zum vierten, und das dritte zum vierten wie das vierte zum fünften u. ſ. w. So machen z. E. die in natürlicher Ordnung fortlauffende arabiſche Zahlzeichen eine arithmetiſche Progreſſion,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, u. ſ. w.

Dann $1 - 2 = 2 - 3$,
$2 - 3 = 3 - 4$
$3 - 4 = 4 - 5$ u. ſ. w.

In einer arithmetischen Progression wird also die Differenz gesehen; wenn diese einerley bleibt, so ist die Progression richtig. So ist die Differenz zwischen 1 und 2 eins, zwischen 2 und 3 wieder eins, zwischen 3 und 4 gleichfalls eins u.s.w. Gesetzt nun, das erste Glied einer solchen Progression heisse a, die Differenz d, so wird der allgemeine Ausdruck für die arithmetische Progression seyn:

Allgemeiner Ausdruck für alle arithmetische Progressionen.

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d \text{ u.s.w.}$$

Wenn nun das erste und letzte Glied zusammen addirt wird, so hat man $2a+5d$; addirt man das zweyte von vornen zum zweyten von hinten, so hat man wiederum $2a+5d$. u. s. w. Dann

$$\begin{array}{cccccc} a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, \\ & & & a+2d & a+d & a \\ \hline & & & 2a+5d & 2a+5d & 2a+5d \end{array}$$

Allgemeine Eigenschaften der arithmetischen Progressionen.

Folglich sind in einer arithmetischen Progression die Summen der beeden äussersten Glieder und die Summen zweyer von den äussersten gleich weit abstehender Glieder allemal einander gleich. Diese Eigenschaft der arithmetischen Progressionen gründet sich, wie wir schon oben bey der Natur der Proportionen gemeldet, auf den wesentlichen Begriff einer solchen Progression, und ist aus dem angeführten allgemeinen Ausdruck leicht erweißlich und verständlich. Eben dieser Ausdruck bahnet uns zugleich den

Weg,

Weg, das letzte Glied in einer solchen Progression zu finden. Dann wir sehen, daß die auf das erste folgende Glieder allesamt aus dem ersten Glied und der Differenz, ein oder etlichmal genommen, zusammen gesetzt seyen. Geben wir nun auf die Anzahl der Glieder Achtung, so können wir finden, wie vielmal die Differenz bey einem jeden Glied genommen werde. Bey dem zweyten Glied wird sie einmal genommen, bey dem dritten zweymal, bey dem vierten dreymal, bey dem fünften viermal; folglich immer einmal weniger, als die Anzahl der Glieder Einheiten hat. Gesetzt nun diese Anzahl heisse n, so wird das letzte Glied nach dieser beobachteten Regel seyn $a + (n - 1)d$, demnach giebt es abermal eine allgemeiner ausgedruckte Progression, wenn man von hinten anfangt, und das letzte Glied zuerst setzt, nemlich

Wie man das letzte Glied einer arithmetischen Progression auf eine allgemeine Weise finden und ausdrucken, auch dadurch den Ausdruck für die Progression selbst noch allgemeiner machen könne.

$$a+(n-1)d, a+(n-2)d, a+(n-3)d,$$
$$a+(n-4)d \text{ u. s. w.}$$

Ist einem nun das letzte Glied, die Anzahl der Glieder und die Differenz gegeben, so wird sich die Progression leicht endigen, und das erste, wie auch alle übrige Glieder finden lassen. Dann z. E. es seyen $n = 4$, so ist $(n-4)d = (4-4)d = 0$, folglich $a + (n-4)d = a$, welches das erste Glied ist.

§. 92. Eben so ist es auch leicht, die ganze Summe einer arithmetischen Pro-

Von der Art und Weise,

die ganze Summe einer arithmetischen Progression zu finden.

gression zu suchen. Dann weil allemal die beede äusserste, und die von den äussersten gleichweit abstehenden Glieder gleiche Summen haben, so bekäme man durch die Addition aller so beschaffener Glieder die ganze Summe richtig; folglich darf man, um Zeit und Mühe zu sparen, die Summe des ersten und letzten Gliedes nur in die halbe Zahl der Glieder multipliciren. Z. E. 2, 4, 6, 8, 10, 12, ist eine arithmetische Progression: denn wenn man die äusserste und von den äussersten gleichweit abstehende Glieder addirt, so hat man

2,	4,	6,	8,	10,	12
			6	4	2
			14,	14,	14,

das ist 3 mal 14. Nun ist diese Operation zu mühsam; man druckt sich dahero gerne kürzer aus. Wir sehen, daß die Progression sechs Glieder hat, und folglich durch die vorgeschriebene Addition 3 gleiche Summen giebt; folglich wollen wir die Anzahl der Glieder halbieren, und eine von den Summen, welche sich am besten dazu schickt, dadurch multipliciren. Die Summe der beyden äussersten ist die bequemste, weil der Ausdruck des ersten und letzten Gliedes so beschaffen ist, daß er auch zu einem kurzen und leicht zu behaltenden Ausdruck für die Summe den Weg bahnen kann. Da nun das erste Glied a, das letzte $a+(n-1)d$, so wird die Summe dieser zwey Glieder seyn

$= 2a + (n - 1)d$, und wenn man mit der halben Anzahl der Glieder $= \frac{1}{2}n$ multiplicirt, die Summe der ganzen Progression $= (2a + (n-1)d)\frac{1}{2}n = (2a + (n-1)d).\frac{n}{2} = \frac{2an + (n^2 - n)d}{2} = an + \frac{(n^2 - n)d}{2}$

Kurzer, allgemeiner und schicklicher Ausdruck, die Summe einer arithmetischen Progression anzuzeigen.

Folglich kann man aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder und ihrem Unterscheid die ganze Summe einer arithmetischen Progression finden. Wenn $a = 1$ und $d = 2$, so ist die Summe $= n + (n^2 - n)\frac{2}{2} = n + n^2 - n = n^2$, oder das Quadrat der Anzahl der Glieder. Z. E.

Wie und warum man durch die Addirung der ungeraden Zahlen alle Quadratzahlen erfinden könne, wird aus der Natur der arithmetischen Progressionen erwiesen,

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	$= 8^2$	$= 64.$
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.	$= 7^2$	$= 49.$
1, 3, 5, 7, 9, 11,	$= 6^2$	$= 36.$
1, 3, 5, 7, 9,	$= 5^2$	$= 25.$
1, 3, 5, 7,	$= 4^2$	$= 16.$
1, 3, 5,	$= 3^2$	$= 9.$
1, 3.	$= 2^2$	$= 4.$
1	$= 1^1$	$= 1.$

Aus dieser Tabelle erhellt unter anderm, daß alle nur mögliche Quadratzahlen, so weit sie sich denken lassen, durch die Addition der ungeraden Zahlen, das ist, der Glieder einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 1, und deren Differenz 2 ist, gefunden werden können. Wir werden aber sogleich sehen, wie die arithmetische Progressionen nicht nur bey Erfindung der Quadraten, sondern auch bey hö-

und gezeigt, wie die arithmetische Progressionen überhaupt einen

grossen Einfluß in die geometrische haben.

höhern Potenzen einen ungemeinen und höchstwichtigen Einfluß in die geometrische Progressionen haben, wenn wir von den Logarithmen reden. Dann ich halte nicht für nöthig, daß ich mit leichten und überall vorkommenden Aufgaben, z. E. aus der Summe und den gegebenen beeden äussersten Gliedern die Differenz, aus den gegebenen beeden äussersten Gliedern und der Differenz die Summe und die Anzahl der Glieder, aus der Differenz, der Summe und der Zahl der Glieder, die beede äusserste Glieder u. s. w. zu erfinden, meine Leser in die Länge erst noch aufhalten solle. Wer ein Exempel berechnen kann, wird sie alle berechnen können. Z. E. es sey gegeben das letzte Glied = b, die Differenz = d, die Anzahl der Glieder = n; man solle das erste Glied = x finden. So ist das letzte Glied nach unserm obigen Ausdruck $x + (n - 1)d = x + nd - d$; dieser Ausdruck wird dem gegebenen b gleich seyn, weil eine jede Grösse sich selbst gleich ist. Folglich setze ich

Warum man die Exempel, wie man aus gewissen gegebenen Theilen einer arithmetischen Progression die übrige finden solle, nicht weitläuftiger anführe, und wie man nach einem einigen Exempel die übrigen leicht berechnen könne,

$$\begin{array}{l} b = x + nd - d, \text{ und subtrahire beederseits } nd - d \\ \hline b - nd + d = x \end{array}$$

Hier habe ich x in lauter bekannten Zahlen; will ich nun das zweyte Glied haben, so addire ich nur noch ein d dazu u. s. w. Verlange ich die Summe der ganzen Progression, so nehme ich den allgemeinen Ausdruck der Summe

nx

$$nx + (n^2 - n)\frac{d}{2} = nx + \frac{n^2d - nd}{2}$$

und da ich x gefunden habe, auch allemal gleiches für gleiches setzen darf, so setze ich seinen Werth in bekannten Grössen, da ich dann bekomme

$$n(b - nd + d) + \frac{n^2d - nd}{2}$$ oder

unter einerley Benennung

$$\frac{2n(b - nd + d) + n^2d - nd}{2}$$ und

wenn man wirklich multiplicirt,

$$\frac{2nb - 2n^2d + 2nd + n^2d - nd}{2}$$, und

wenn man aufhebet, was sich gegeneinander aufheben läßt,

$$\frac{2nb - n^2d + nd}{2} = \frac{(2b - nd + d)n}{2}$$

Da ich dann wiederum einen andern Ausdruck für die Summe habe. Doch genug von diesem. Wer sich üben will, wird Gelegenheit genug haben, wenn er nur diejenige Grössen, die er erst erfinden will, x oder y nennet, den übrigen aber ihre alte Namen läßt.

wenn man nur die unbekannte oder erst zu erfindende Grössen, nach Gewohnheit der Mathematikverständigen x, y, z, oder überhaupt mit den letzten Buchstaben des Alphabets benennet.

§. 93. Jetzo reden wir von den Logarithmen, deren Erfinder gewis ein Deutscher, Namens Justus Byrge war, er mag hernach aus der Schweiz oder aus den Hessencasselischen Landen gebürtig gewesen seyn; wie ich in meinen Amœnitatibus

Von den Logarithmen, und ihrem Erfinder,

acad. Fasc. I. mit mehrerem gezeiget. Nach ihme hat erst Johann Nepper, ein Schottländer, den Gebrauch davon gemeinnütziger gemacht, nicht aber die Sache selbst, wie einige vorgeben, erfunden. Wenn unter

was die logarithmische Rechnung überhaupt seye und heisse,

eine mit eins anfangende geometrische Progression eine mit Nulle anfangende arithmetische Progression so geschrieben wird, daß die Glieder der beeden Progressionen in richtiger Ordnung sich auf einander beziehen, so heißt man die Glieder der arithmetischen Progression die Logarithmen von den ihnen correspondirenden Gliedern der geometrischen Progression. Z. E.

wird zuerst mit Exempeln in Zahlen erläutert,

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Bey diesen zwo Progressionen ist 0 der Logarithmus von 1, 3 der Logarithmus von 8, 5 der Logarithmus von 32, 7 der Logarithmus von 128. u. s. w.

und gezeigt, daß durch diese Rechnung die Multiplication in eine Addition,

Durch diese Logarithmen wird nun die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, die Erhöhung zu Potenzen in eine Multiplication, und die Ausziehung der Wurzel in eine blosse Division verwandelt. Z. E. man wollte wissen, wie viel 4. 16 wäre? Wenn ich die Logarithmen brauchen will, so suche ich den Logarithmus von 4, welcher 2 ist, und den von 16, welcher 4 ist; diese beede Logarithmen addire ich zusammen, da ich

dann

dann die Summe 6 bekomme. Nun suche ich, was für eine Potenz in der geometrischen Progression sich darauf bezieht; sie heißt 64; also ist 64 das Product von 4. 16. Ferner wenn ich 128 durch 4 zu dividiren hätte, so suche ich wieder die Logarithmen von beeden Zahlen; von der zu dividirenden Zahl 128 ist der Logarithmus 7, und 2 ist es vom Divisor 4. Nun ziehe ich den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus der zu dividirenden Zahl ab, nemlich 2 von 7, da dann der Rest 5 dem Quotienten 32 correspondirt. Will ich 4 zur dritten Potenz erheben, so nehme ich den Logarithmus von 4, welcher 2 ist, und multiplicire ihn mit 3, weil ich die dritte Dignität verlange; das Product 3.2=6 ist der Logarithmus der gesuchten Potenz 64, welche ihm correspondirt. Wenn ich endlich die Quadratwurzel aus 64 ausziehen will, so dividire ich den Logarithmus dieser Zahl, nemlich 6 durch 2; da dann der Quotient 3 auf die gesuchte Quadratwurzel 8 weiset. Damit diese schöne Erfindung unsern Lesern noch deutlicher gemacht werde, so wollen wir jetzo zwo andere Progressionen nehmen, und hernach den allgemeinen Beweis vortragen. Es seye

die Division in eine Subtraction, die Erhebung zu Potenzen in eine Multiplication, und die Ausziehung der Wurzeln in eine Division verwandelt werde.

Ein anderes Exempel in Zahlen wird angeführt.

geom.	1,	3,	9,	27,	81,	243
arithm.	0,	2,	4,	6,	8,	10

Nun verlangt man das Product aus 3. 27; die Logarithmen davon sind 2 und 6, ihre

Summe ist 8; dieser correspondirt 81; also ist 81 das Product aus 3.27. Auf gleiche Weise bezieht sich auf 243 : 9 der logarithmische Ausdruck 10 — 4 = 6, welche Zahl auf den Quotienten 27 weißt. 3 in der fünften Dignität oder 3^5 ist logarithmisch ausgedruckt 2.5 = 10, worauf 243 sich beziehet. Die Cubicwurzel oder $\sqrt[3]{}$ aus 27 ist logarithmisch ausgedruckt 6 : 3 = 2; welcher Zahl 3 als die gesuchte Wurzel correspondirt. Man siehet also, daß es gleichgültig seye, was man für eine arithmetische Progression unter die geometrische schreibet, wenn man nur hernach bey der einmal angenommenen bleibet; welches nun auch aus dem allgemeinen Beweis noch mehr erhellen wird. Es seye demnach

ob und warum es gleichgültig seye, was man für eine arithmetische Progression, die Logarithmen zu bestimmen, erwähle;

Wie man die Logarithmische Rechnung auf eine allgemeine Art erweisen und demonstriren könne.

geom. $1, n, n^2, n^3, n^4, n^5, n^6, n^7$ u. s. w.
arithm. 0, d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d, 7d u. s. w.
so wird n^2, n^5 logarithmisch seyn 2d + 5d = 7d, welchem Glied n^7 correspondirt; folglich ist n^7 das Product, wie wir es im 2 Capitel §. 49. gefunden haben. $n^6 : n^2$ ist logarithmisch 6d — 2d = 4d, folglich der darauf sich beziehende Ausdruck n^4 der wahre Quotient der gesuchten Zahl; wie wir §. 49. unabhängig von dieser Erfindung bewiesen haben. n^2 in die dritte Potenz erhoben ist logarithmisch 2d. 3 = 6d; welcher Ausdruck sich auf n^6 beziehet; also ist n^6 die dritte Dignität von n^2, wie end-

endlich die $\sqrt[3]{}$ aus n^6 logarithmisch $6d : 3 = 2d$ uns wieder n^2 weiset. Diß ist der Beweis der logarithmischen Regeln, welcher so faßlich vorgetragen wird, als nur immer möglich ist. Dann die zwo allgemeine Progressionen werden jedermann verständlich seyn. Bey der arithmetischen könnte man vielleicht fragen, warum wir nicht unsern Ausdruck der Progression aus §. 91. beybehalten und geschrieben haben

Warum in dem gegebenen Beweis der allgemeine Ausdruck der arithmetischen Progressionen in etwas abgeändert seye.

$a, a + d, a + 2d, a + 3d$ u. s. w.

Allein das erste Glied ist ausdrücklich $= 0$ gesetzt worden; folglich würde die Progression heissen müssen

$0, 0 + d, 0 + 2d, 0 + 3d$ u. s. w.

Das heißt aber eben so viel, als

$0, d, 2d, 3d, 4d$ u. s. w. weil die Nulle weder vermehrt noch vermindert. Jezo wird nichts mehr am ganzen Beweis schwer seyn. Uebrigens erhellet zugleich aus dem bisherigen, daß die Exponenten der Grössen wirklich als ihre Logarithmen angesehen werden können; wie dann aus dieser Aehnlichkeit der Herr Baron von Wolff die ganze Lehre von der Multiplication und Division der Potenzen u. s. w. hergeleitet und erwiesen hat.

Die Exponenten der Dignitäten können als ihre Logarithmen angesehen werden, wie deßwegen Hr. Baron von Wolff aus der Natur der Logarithmen die Multiplication u. Division der Potenzen hergeleitet hat.

§. 94. Allein unsre Leser können mit Recht noch einen andern Anstand haben, und uns die Einwendung machen, wir haben wohl die Logarithmen von einer Progression überhaupt gefunden, aber noch

Ob und wie man auch Logarithmen für die zwo

schen die Glieder der geometrischen Proportion fallende Zahlen finden könne?

noch nicht gezeigt, ob und wie man auch die Logarithmen der zwischen die Glieder fallenden Zahlen finden könne? z. E. zwischen 2 und 4 fällt 3, davon hat man noch keinen Logarithmus; zwischen 4 und 8 fallen 5, 6, 7, auch davon fehlen die Logarithmen u. s. w. folglich fragt man jetzo, ob diese Zahlen gar keine Logarithmen haben, oder wenn sie solche haben, wie sie gefunden werden? diese Frage verdienet vorzüglich beantwortet zu werden.

Allgemeine Beantwortung dieser Frage.

Wir wollen eine allgemeine Auflösung vorläuffig sagen, ehe wir die besondere Art, die Logarithmen der Zwischenzahlen zu finden, anführen. Man sucht zwischen zwey gegebenen Gliedern, z. E. zwischen 2 und 4, so viel mittlere Proportionalzahlen, mit den ihnen correspondirenden Logarithmen, bis man endlich eine findet, welche der Zahl 3 entweder ganz gleich oder am nächsten kommt; da man dann den dazu gehörigen Logarithmus auch suchet und darunter schreibet. Nun siehet man wohl, daß man die Zwischenglieder und ihre Logarithmen nicht so accurat finden könne; dahero hilft man sich mit Brüchen von grossen Nennern, damit der Fehler so klein werde, als immer möglich ist, und oft kaum ein Milliontheilgen betrage. Diß ist die allgemeine Antwort.

Besondere Auflösung und Antwort, daß man die

Die besondere wird nun auch faßlich seyn. Man hat die geometrische Decimalprogression von 1, 10, 100 u. s. w. ange-

angenommen; und unter diese die in natürlicher Ordnung fortgehende und von Nulle anfangende Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. geschrieben. Z. E.

geometrische Progression von 1, 10, 100, 1000, u. s. w. angenommen und nach den Proportionsregeln die Zwischen-Glieder suche,

Geom. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000,
Arithm. 0, 1, 2, 3, 4, 5,

Also ist der Logarithmus von 1, 0, von 10, 1, von 100, 2 u. s. w. Zwischen 1 und 10 sucht man die mittlere geometrische Proportionalzahl; zwischen der gefundenen und zehen abermal die mittlere u. s. w. bis man endlich eine gefunden, die 9 am nächsten ist. Eben so suchet man zugleich zwischen 0 und 1 die mittlere arithmetische Proportionalzahl, und fährt mit dieser Operation so lange fort, bis man das dem Neuner correspondirende oder am nächsten kommende arithmetische Glied gefunden hat, welches hernach sein Logarithmus ist.

warum man die Glieder nicht accurat finden könne,

Damit nun der Fehler kleiner werde als ein Milliontheilgen, so hängt man dem Einser und dem 10 sieben Nullen an; z. E. 1.0000000, 10.0000000, wodurch angezeigt wird, daß beede Zahlen einen Nenner haben = 10000000; dann $1 = \frac{1.0000000}{1.0000000}$ und $10 = \frac{10.0000000}{10000000}$. Damit man aber nicht so viel schreiben darf, so läßt man den Nenner weg, weil der nach dem Einser und Zehner angehängte Punkt, der sonst auch die

wie man aber doch Mittel habe, den Fehler so gering und klein zu machen, als nur immer möglich seye, und wie dieses durch an-

gehängte Nullen und Decimalbrüche geschehe,

die Characteristik genannt wird, von selbsten den Nenner durch die folgende Nullen angezeigt, den man im Sinn hinzudenken muß. Zwischen diesen zwey Gliedern suchet man nun, wie schon gemeldet wurde, die mittlere geometrische Proportionalzahl, u. s. w. bis man auf neune kommt. Eben so macht man es mit der arithmetischen Progression, deren Gliedern gleichfalls sieben Nullen angehängt werden. Dann $\frac{0.0000000}{10000000} = 0$,

und $\frac{1.0000000}{10000000} = 1$. Man läßt dahero abermal, um das Schreiben zu verkürzen, den Nenner hinweg, und sucht zwischen dem ersten und zweyten Glied die mittlere arithmetische Proportionalzahl, u. s. w. bis man die findet, die dem Neuner mit seinen sieben Nullen in der geometrischen Progression correspondirt. Nach dieser Operation sucht man zwischen 1 und 9 die mittlere Proportionalzahl u. s. w. auf gleiche Weise, bis man den Achter bekommt u. s. w. Nun können wir es unsern Lesern nicht verargen, wenn sie sagen, das seye die verdrüßlichste Arbeit von der Welt. Allein wir legen ihnen ja diese Arbeit nicht auf, und fordern nicht einmal ein einiges Exempel von ihnen, das sie berechnen sollten, vielweniger alle. Sie sind längstens berechnet, und es haben

warum einen diese verdrüßliche und mühsame Rechnung nicht erschrecken dürfe,

ben sich Leute, welche zu solchen mühsamen Arbeiten gleichsam gebohren werden müssen, entschlossen, Jahr und Tag an einem fort zu rechnen, und ihre Rechnungen durch den Druck gemeinnützig zu machen. Das sind die sogenannte Tabulæ Sinuum & Tangentium, wo nicht nur für die Zahlen, sondern auch für die Linien, die man Sinus und Tangenten nennet, alle nöthige Logarithmen berechnet sind, und von denen, die was logarithmisch auflösen wollen, nur erkauft und nachgeschlagen werden dürfen. Nun ist leicht begreifflich, daß einem Buch von lauter Zahlen in Absicht auf seine Richtigkeit nicht allemal zu trauen sey. Doch darf man eines von dieser den Lesern vorzüglich anpreisen, nemlich das Vlacquische, welches das correcteste seyn solle. Warum man übrigens die Decimalprogression 1, 10, 100, 1000 u. s. w. angenommen und allen übrigen bey dieser Arbeit vorgezogen habe, ist aus dem grossen Vortheil der Decimalbrüche leicht zu verstehen. Eine Rechnung, wo lauter Decimalbrüche vorkommen, macht nicht halb so viel Mühe, als eine andere; und läßt sich auch neben dem weit kürzer ausdrucken. Denn wenn ich z. E. die Progression $3 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$ habe, so heißt sie so viel als der einige Bruch $\frac{342857}{100000}$, oder, wenn ich den Nenner gar weglasse 3. 42857; in wel-

und wie in den sogenannten logarithmischen Tafeln alles schon vorgeschafft und zum voraus berechnet seye;

welche Tafeln für die correcteste gehalten werden.

Warum man zu dieser Arbeit die Decimalprogression von 1, 10, 100 u. s. w. vorzüglich erwehlt habe.

welchem Fall die Zahlen nach dem Punkt, oder nach der Characteristik 3, Decimalfractionen anzeigen, oder Zehler von Nennern sind, die in der Decimalprogression fortgehen, oder deren gemeinschaftlicher Nenner so viel Nullen hat, als der ganze Zehler Zahlzeichen hat. Der Beweis davon ist leicht, wenn man nur die angeführte Brüche nach der Hauptregel unter einerley Benennung bringt. Wir werden aber bey Ausziehung der Wurzeln das weitere von den Vortheilen der Decimalbrüche sagen.

Vom Gebrauch der Logarithmen in der Buchstabenrechnung, und wie man sich hier noch kürzer ausdrucken könne.

§. 95. Wir haben alles, was von den Logarithmen zu wissen nöthig ist, umständlich vorgetragen. Eines ist noch übrig, daß wir nemlich auch zeigen, wie man in der allgemeinen Buchstabenrechnung sich der Logarithmen bedienet. Wir wollen die Logarithme mit dem Buchstaben *l* ausdrucken und z. E. sagen, der Logarithmus von a seye la, der Logarithmus von b seye lb, der Logarithmus von y seye ly u. s. w. Wenn wir demnach das Product abx logarithmisch ausdrucken wollten, so müßte es heissen la + lb + lx, weil wir wissen, daß die Multiplication durch die logarithmische Rechnung in eine Addition verwandelt wird §. 93. und weil die Division eine Subtraction wird, so wird der Ausdruck $\frac{ax}{y}$ logarithmisch heissen (la + lx) — ly,

Beweis der logarithmi-

—ly, der Ausdruck $\frac{b}{a}$ = lb — la u. s. w. In Rucksicht auf die Wurzel und Dignitäten dürfen wir auch die allgemeine Rechnung brauchen: dann weil x^2 logarithmisch 2lx, und x^5, 5lx, und x^n, nly u. s. w. heißt, so werden sich auch schwerere Ausdrücke bald geben. Z. E. a^{n-2} wird logarithmisch heissen nla — 2la; dann gesetzt n seye 5, so hiesse der Ausdruck a^{5-2} in der logarithmischen Rechnung 5la — 2la = 3la. Da nun a^3 logarithmisch 3la heißt, so ist der obige Ausdruck a^{5-2} durch die Logarithme 5la — 2la, und der allgemeine a^{n-2} durch die Logarithme nla — 2la richtig gegeben worden. Eben dieses läßt sich auch aus der allgemeinen Divisionsregel erweisen. Denn weil $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}$ §. 57. und die Logarithmen die Division in eine Subtraction verwandeln, so muß der logarithmische Ausdruck heissen na — 2la. Diese Ausdrücke muß man sich wohl bekannt machen. Wir wollen noch andere Exempel vorschreiben. Der Ausdruck $b^{n-1}xy$ heißt logarithmisch nlb — lb + lx + ly; der Ausdruck $a^n b^{x-2} y$ heißt logarithmisch nla + xlb — 2lb + ly; der Ausdruck $x^2 y^{n-4} a$ heißt logarithmisch 2lx + nly — 4ly + la. u. s. w. Mit den Wurzeln hat es eine gleiche Beschaffenheit. Z. E. $\sqrt[4]{n^3} = n^{\frac{3}{4}}$ ist loga-

schen Ausdrücke für alle Fälle, die sowohl bey der Multiplication und Division, als auch bey den Potenzen und Wurzeln vorkommen.

logarithmisch $\frac{3ln}{4}$ oder $\frac{3}{4}ln$, $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$ ist logarithmisch $\frac{2}{5}lx$ u. s. w. Den Vortheil von diesen Ausdrücken wollen wir jetzo in einigen Exempeln zeigen.

Anwendung der logarithmischen Buchstabenrechnung auf ein Exempel, wenn man die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression finden solle.

§. 96. Man solle in einer geometrischen Progression aus dem gegebenen ersten und letzten Glied und dem Namen der Verhältniß oder dem Exponenten, die Zahl der Glieder finden. Dieses Exempel wird uns schon von dem Nutzen der logarithmischen Ausdrücke überzeugen können. Es seye demnach das letzte Glied = b.

und das erste = a.

der Name der Verhältniß oder der Exponent = m.

und die gesuchte Anzahl der Glieder = x.

So ist nach §. 85. das letzte Glied, anders ausgedruckt, $m^{x-1}a=b$; das ist, nach logarithmischen Ausdrücken §. 95.

$xlm - lm + la = lb$. Folglich §. 9.

$xlm - lm = lb - la$ und weil

$lm = lm$ §. 9.

$xlm = lb - la + lm$ mithin

$: lm$

$x = \frac{lb - la + lm}{lm}$ das ist nach §. 60.

schicklicher ausgedruckt

$$x = \left(\frac{lb-la}{lm}\right) + 1.$$

Wenn

Wenn nun a, b und m in Zahlen gegeben sind, so schlägt man in den logarithmischen Tabellen die Logarithmen davon auf, ziehet den Logarithmus des ersten Glieds von dem Logarithmus des letzten Gliedes ab, dividirt hernach die Differenz durch den Logarithmus des Exponenten, und addirt zum Quotienten noch eins, damit die Anzahl der Glieder nach der vorgeschriebenen Formel herauskomme. Dieses Exempel wird hinlänglich seyn, unsern Lesern eine Kenntniß von dem Gebrauch der Logarithmen in der Buchstabenrechnung beyzubringen, und sie von dem grosen Werth dieser Erfindung zu überzeugen. Wollen sie noch etwas zum Lobe des Erfinders hinzudenken, so ist es dieses, daß sie durch diese Rechnung nicht nur des weitläuftigen Multiplicirens und Dividirens, sondern auch der so beschwerlichen Ausziehung der Wurzeln, besonders aus höhern Dignitäten, gänzlich überhoben werden. Dahero man allerdings auch nebenher denenjenigen Arbeitern, welche uns durch wirkliche Berechnung der Logarithmen für die correspondirende Zahlzeichen vorgeschaffet haben, einen wahren Dank abzustatten hat.

Die Regel selbst wird in Worten ausgedruckt.

Grosse Vorzüge und Nutzbarkeit der logarithmischen Erfindung.

§. 97. Die Lehre von den Proportionen und Progressionen ist nunmehro nach ihrem ganzen Umfang vorgetragen worden. Es giebt aber noch zerschiedene sogenannte Nebenproportionen und Progressionen, welche wir unserem Vorhaben

Kurze Anzeige einiger sogenannten Nebenproportionen und Progressionen.

gemäß kürzlich anzeigen, weil sie aber von keinem so grossen Gewichte und Nutzen sind, als die bisherigen, nicht ausführlich vortragen werden. Hieher rechnen wir die harmonische und contraharmonische Proportionen, die Pronikzahlen, wie auch die sogenannte Polygonal- und Pyramidalzahlen. Eine **harmonische Proportion** entsteht, wenn die Differenz des ersten und zweyten Gliedes sich zur Differenz des dritten und vierten verhält, wie das erste Glied sich zum vierten verhält. Ist das zweyte Glied dem dritten gleich, so ist von selbst klar, daß in diesem Fall die Differenz des ersten und zweyten sich zur Differenz des zweyten und dritten verhalte, wie das erste zum dritten. Z. E. 10, 16, 40 sind drey harmonische Proportionalzahlen; dann die Differenz zwischen dem ersten und zweyten Glied $16 - 10 = 6$, und die Differenz zwischen dem zweyten und dritten Glied $40 - 16 = 24$, verhalten sich zu einander wie das erste zu dem letzten Glied, oder wie 10 zu 40; weil

nemlich der harmonischen,

$$6 : 24 = 10 : 40.$$

und contraharmonischen Proportionen,

Die **contraharmonische Proportion** ist gerade umgekehrt: dann bey dieser verhält sich die Differenz der zwey ersten Glieder zur Differenz der zwey folgenden, wie das letzte Glied zum ersten sich verhält. Z. E. 3, 5, 6 sind drey contraharmonische Glieder, weil sich verhält $3 - 5 = 2$ zu $6 -$

$5 = 1$

5 = 1 wie 6 zu 3. Sollte also aus zwey gegebenen Gliedern a und b in einer harmonischen Proportion das dritte x gefunden werden; so heißt die Proportion:

$$\begin{array}{ll} b - a : x - b = a : x & \text{folglich} \\ \hline bx - ax = ax - ab & \text{und §. 9.} \\ bx = 2ax - ab & \text{ferner} \\ ab + bx = 2ax, & \text{und} \\ \hline ab = 2ax - bx, & \text{das ist §. 60.} \\ ab = (2a - b)x & \text{folglich} \\ \hline \quad : 2a - b & \end{array}$$

$$\frac{ab}{2a-b} = x.$$

Die contraharmonische dritte Proportionalzahl läßt sich eben so finden, nur muß man die Auflösung noch auf das folgende Capitel versparen, weil eine unreine quadratische Gleichung dabey vorkommt, wovon wir erst im fünften Capitel handeln werden. Uebrigens siehet man schon, daß es, wann man mehr Glieder auf gleiche Art suchet, harmonische und contraharmonische Progressionen geben werde, und daß überhaupt diese ganze Lehre keine neue Hauptgattung der Proportionen ausmache.

§. 98. Was die Pronikzahlen betrifft, so bestehet die ganze Wissenschaft davon darinnen, daß man die Summe eines Quadrats und seiner Wurzel eine Pronikzahl nennt; folglich ist $n^2 + n$, oder $a^2 + a$ eine sogenannte Pronikzahl; oder in

der sogenannten Pronikzahlen.

in wirklichen Zahlzeichen sind 4 + 2, 9 + 3, 16 + 4, 25 + 5, das ist, 6, 12, 20, 30 u. s. w. wirkliche Pronikzahlen. Weil wir die unreine quadratische Gleichungen noch nicht erkläret, so können wir auch bey diesen Grössen noch nicht ausführlich zeigen, wie ihre Wurzeln gefunden werden.

der Polygonalzahlen,

Polygonalzahlen sind diejenige Zahlen, welche durch die Addition der Glieder in einer arithmetischen Progression, die mit Eins anfängt, entstehen, z. E.

I.	arithm. Progr.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
	polyg. Zahlen	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,
II.	arithm.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,
	polygon.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,
III.	arithm.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19.
	polygon.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70.

nebst einer Erklärung vom Ursprung ihres Namens.

Weil das zweyte Glied in der ersten Classe der Polygonalzahlen 3 ist, so heißt man sie Trigonal- oder Triangularzahlen; aus gleichem Grunde werden die in der zweyten Classe Quadrangularzahlen, die in der dritten Pentagonalzahlen u. s. w. genannt. Ihren Namen haben sie von den geometrischen Figuren, daraus sie entstehen können, erhalten. Darum heißt das zweyte Glied in einer Polygonalzahl die Anzahl der Winkel, welche anzeigt, wie viel diejenige geometrische Figur Winkel habe, mit welcher die Polygonalzahl eine Aehnlichkeit hat, oder woraus sie entstehen könnte. Die Seite des Polygons

gons hingegen ist die Anzahl der Glieder der arithmetischen Progression, aus deren Summe die gegebene Polygonalzahl erwachsen ist. Wie man nun daraus die Polygonalzahl u. s. w. finden könne, ist leicht begreifflich. Die Sache aber selbst ist von keinem so grossen Gewichte, und kommt in der ganzen Mathematik gar selten vor; dahero wir unsern Leser nicht damit aufhalten wollen. Ein gleiches müssen wir von den Pyramidalzahlen sagen; diese entstehen, wenn man Polygonalzahlen addirt. Z. E.

der Pyramidalzahlen u. s. w.

Polygon. Triang.	1, 3, 6, 10, 15, 21.
Pyramid.	1, 4, 10, 20, 35, 56.

Wenn nun diese wieder aufs neue addirt werden, so heissen die herauskommende Glieder Pyramidalzahlen von höhern Gattungen u. s. w. Unsere Leser begreiffen von selbst, daß man noch viele Veränderungen mit den Zahlen vornehmen, und für eine jede Veränderung neue Namen ausfindig machen könne. Da wir nun die fruchtbarste, gemeinnützigste und nöthigste Veränderungen in Ruckſicht auf die Proportionen und Progressionen gesagt haben, so wollen wir jetzo zum Beschluß eilen, und ihre Gedult mit keinen weder neuen noch alten Zahlnamen, dahin auch die gerade und ungerade, ferner die Primzahlen und andere gehören, in die Länge mehr ermüden. Wenn man nur das, was von den geo-

Warum man nicht so weitläuffig davon handle.

metrischen Proportionen vorgetragen worden ist, dem Gemüthe wohl eindrückt, so wird man im folgenden leicht fortkommen; dann die Lehre von den Proportionen ist gleichsam die Seele der ganzen Mathematik.

Was die Combinations-Regeln seyen,

§. 99. Den Beschluß dieses Capitels machen wir mit den Combinations-Regeln, kraft welcher man eine gegebene Anzahl Buchstaben, Wörter, Namen oder Personen so oft versetzen solle, als es möglich ist. Wir nehmen zuerst zween Buchstaben a und b; diese lassen sich 2mal versetzen. Denn entweder sage ich ab oder ba; eine dritte Versetzung ist nicht möglich. Hernach versuche ich es mit drey, oder ich nehme den Buchstaben c dazu; dessen Versezung suche ich zuerst mit ab, da es dann heißt

wie oft eine gegebene Anzahl Buchstaben versetzt werden könne,

c a b
a c b
a b c,

Weiter oder mehrmalen läßt er sich nicht versetzen. Hernach combinire ich ihn mit ba, da ich wieder drey Versetzungen bekomme, nemlich

c b a
b c a
b a c,

Auflösung und Beweis.

also in allem sechse. Wenn ich nun den vierten Buchstaben d dazu nehme, so muß ich ihn mit einem jeden von den gefundenen sechs Ausdrücken verbinden; da er sich dann mit einem jeden viermal verbinden

den läßt, z. E. mit dem ersten cab, kann ich d viermal verbinden, daß herauskommt

1) dcab
2) cdab
3) cadb
4) cabd

Eben so vielmal läßt sich dieser Buchstab mit einem jeden der folgenden Ausdrücke verbinden; folglich lassen sich 4 Buchstaben 6. 4mal, das ist 24mal versetzen. Nun habe ich schon eine Regel, nach welcher die übrige Verbindungen sich richten werden. Dann zwey lassen sich zweymal, drey sechsmal, vier vier und zwanzigmal, das ist, 2 lassen sich 2. 1. drey lassen sich 3. 2. 1, und 4 lassen sich 4. 3. 2. 1 versetzen. Folglich werden fünfe 5. 4. 3. 2. 1 und sechse 6. 5. 4. 3. 2. 1 mal sich versetzen lassen. Wenn also die Anzahl der Buchstaben n ist; so wird die Anzahl der Veränderungen seyn n. n — 1. n — 2. n — 3. n — 4. n — 5 u. s. w. Ist mir nun n in endlichen Zahlen gegeben, so wird es zuletzt = 1 werden, folglich das Product sich endigen. Wenn also 12 Personen an einer Tafel sitzen, so kann man 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1mal, das ist, viele Millionen mal mit ihnen abwechseln. Eben hieraus siehet man, wie oft sich die sämtliche Buchstaben des Alphabets, die einsylbige Wörter in einem Vers u. s. w. versetzen lassen. Es giebt zwar noch zerschie-

dene Fälle bey dieser Combinations-Regel. Z. E. wenn einige Buchstaben doppelt oder dreymal u. s. w. vorkommen, in welchem Fall man das Product wiederum dividiren muß. Dann es solle a allein gegeben seyn, so hat man, wenn a doppelt vorkommt, eben den einigen Ausdruck aa; kommt b noch dazu, so heißt es baa, aba, und aab; kommt c noch dazu, so läßt es sich mit einem jeden der drey gefundenen Ausdrücke, wie oben 4mal verbinden; folglich giebt es 12 Verbindungen. Demnach jedesmal nur halb so viel, als bey der Verbindung von 4 zerschiedenen Buchstaben. Die Regel heißt mich also in diesem Fall das obige Product mit 2 dividiren. Die Anzahl der Versetzungen wird folglich, wenn ein Buchstab 2 mal vorkommt, durch einen allgemeinen Ausdruck seyn $\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.1}$ u.s.w.

Was für Nebenfragen bey dieser Regel vorkommen können, und wie sie beantwortet werden.

Eben so kann man eine Regel finden, wenn ein Buchstab dreymal vorkäme, da denn der Divisor heissen wird 3.2.1. u.s.w. Aus dem bisherigen siehet man schon, daß sich allerhand Fälle bestimmen und unter gewisse Regeln bringen lassen. Dahin gehört auch die Combination der Zahlzeichen nach der Decimalprogression, wie wir im ersten Capitel vorläuffig gemeldet haben. Z. E. es ist die Frage, wie oft neun Zahlzeichen mit einander so verbunden werden können, daß allemal je zwey und zwey zu-

sammen kommen, und jedes derselben 2mal zu sich selbst gesetzt werde. Die Auflösung wird sich leicht geben, wenn ich zuerst mit 2 Buchstaben es versuche. a und b seyen die Buchstaben. Folglich wird nach der Regel die Verbindung herauskommen:

Warum man von zehen nicht weiter als bis hundert in der Decimalprogression die Zahlen mit zwey Zahlzeichen schreiben könne,

aa, ab
bb, ba

Weitere Versetzungen von dieser Gattung giebt es nicht. Die Combination ist also von 2 Buchstaben nach der gegebenen Regel 4mal möglich. Nehmen wir drey, nemlich a, b, c, so ist ausser

aa, ab, ac,
bb, ba, bc,
cc, ca, cb,

keine weitere regelmäßige Versetzung mehr möglich. Demnach geben 3 Buchstaben 9 solche Versetzungen. Eben so wird man finden, daß 4 Buchstaben 16 Versetzungen geben u. s. w. Folglich allemal das Quadrat von der Anzahl der gegebenen Buchstaben. Wenn also die Anzahl der Buchstaben n, so ist die Anzahl der Versetzungen n^2; und bey den 9 Zahlzeichen ist die Anzahl der Versetzungen nach der gegebenen Regel 81 das Quadrat von neune. Diese Regel hält ihre Probe. Wir wissen, daß wir von 10 bis 100, 90 Versetzungen der Zahlzeichen haben; unter diesen 90 Verbindungen sind neune mit 0 verbunden, nemlich 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

und hernach bey 100 schon drey Zahlzeichen mit einander verbinden müsse.

Diese

Diese 9 von 90 abgezogen lassen gerade 81, die Anzahl der Verbindungen von den Zahlzeichen selbst. Eben so kann man eine Regel von 100 bis 1000 finden; da nemlich jedes Zahlzeichen 3mal vorkommt, und die Verbindung dreyfach ist; u. s. w. Auf gleiche Weise lassen sich alle mögliche Wörter in einer Sprache bestimmen, wann es der Mühe werth wäre, diese Sache zu untersuchen: dann die Arbeit wäre in der That mühsam, weil man wegen den mancherley Combinationen, da es Wörter aus 2, 3, 4, 5 und mehr Buchstaben gibt, auch wegen den gehörigen Vocalen, die ein jedes Wort haben muß, allzuviel Nebenbestimmungen der Regel geben würde. In meinen Princip. cogitandi habe ich §. 516. gezeigt, wie man die vier Buchstaben A, E, I, O, 64mal versetzen könne, daß allemal drey und drey zusammen kommen, und jeder Buchstabe dreymal, zweymal und einmal in einer Combination gesetzt werde. Auch dieses gründet sich auf die Combinations-Regel; denn man nehme zween Buchstaben a und b, so wird man nach dieser Regel 8 Versetzungen haben, nemlich

aaa, aab, aba, abb,
bbb, bba, bab, baa.

Drey Buchstaben a, b, c, werden 27 Versetzungen geben, 4 geben 64 u. s. w. Folglich läßt sich eine allgemeine Regel auch für diese Combinationen bestimmen; denn weil

Ob man finden könne, wie viel Wörter in einer Sprache möglich seyen.

Wie die Progression der Versetzungen fortgehe, wenn je drey und drey Buchstaben verbunden werden, und warum z. E. in der Vernunftlehre nicht weiter als 64 sogenannte modi oder Versetzungen der Buchstaben A, E, I, O, möglich seyen.

weil 8 der Cubus ist von 2, 27 der Cubus von 3, 64 der Cubus von 4, so wird die Anzahl der Versetzung nach den Cubiczahlen fortgehen; und z. E. fünf Buchstaben sich 5. 5. 5mal oder 125mal, 6 Buchstaben 6. 6. 6 oder 216mal, und n Buchstaben n. n. nmal n^3mal nach der letzten Aufgabe versetzen lassen. Doch genug von diesem. Wir haben unsern Lesern schon einen Fingerzeig gegeben, wie sie auch in dieser Kunst zu erfinden sich üben können. Wir eilen zu dem folgenden Capitel, und tragen nunmehro auch die wichtige und schöne Lehre von der wirklichen Ausziehung der Wurzeln, nebst ihrer Verhältniß zu den Potenzen vollends vor, damit wir hernach die allgemeine und besondere Arithmetik zugleich beschliessen und zu Ende bringen können.

Beschluß dieses Capitels.



Fünf=

Fünftes Capitel.

Von wirklicher Ausziehung der Wurzeln, sie mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, wie auch von den algebraischen Aufgaben.

Warum man von Ausziehung der Wurzeln besonders noch handle, und was für ein Unterschied zwischen ihrer Anzeige und wirklichen Ausziehung überhaupt seye.

§. 100.

Wir haben umständlich erzehlt, was Wurzeln und Potenzen seyn, dahero wir unsere Leser auf die schon erklärte Namen und Ausdrücke blos zurückweisen, und uns durch Wiederholung der C. II. vorgetragenen Lehre in keine unnöthige Weitläuftigkeit einlassen dürfen. Weil aber zwischen der blosen Anzeige einer Wurzel und zwischen der wirklichen Ausziehung derselben ein grosser Unterschied beobachtet wird, so können unsere Leser mit Recht von uns fordern, daß wir ihnen eine Anweisung geben, wie sie die Wurzeln von allen nur möglichen Potenzen wirklich ausziehen sollen. Dieser Arbeit ist nun das gegenwärtige Capitel gewiedmet, in welchem wir zeigen werden, wie die blos angezeigte Wurzeln z. E. $\sqrt{ax}$ oder $\sqrt{5}$ oder $\sqrt[n]{x^m y}$ u. s. w. in wirklichen bestimmten Grössen, wenn sie auch unendliche Reyhen geben sollten, ausgedruckt werden können. Da nun leicht begreiff-

greifflich, daß manche Ausdrücke von der letztern Gattung vorkommen werden, so müssen wir diejenige Wurzeln, die in endlichen Zahlen sich ganz ausdrucken lassen, von den andern, die eine unendliche lange Reyhe von Brüchen geben, auch dem Namen nach unterscheiden; jene heißt man deßwegen Rational-Grössen, diese aber Irrational-Grössen. Bey diesem letztern Namen müssen diejenige, welche gern alles deutsch geben wollen, sich hüten, daß sie ihn nicht durch unvernünftige Grössen übersetzen. Denn wie im lateinischen Rationator ein guter Rechenmeister heißt, so wird eine Rational-Grösse diejenige seyn, die sich durch eine bestimmte Rechnung ausdrucken läßt; folglich ist eine Irrationalgrösse, welche man durch die gewöhnliche Rechenkunst nicht genau finden kann. So ist $\sqrt{4}$ eine Rationalgrösse; dann sie ist dem Ausdruck 2 vollkommen und aufs genaueste gleich. Hingegen $\sqrt{2}$ ist eine Irrationalgrösse, weil ich die Wurzel in wirklichen Zahlen nicht genau geben kann, es sey dann, daß ich meine Arbeit in das unendliche fortsetze; diß aber ist einem endlichen Geschöpfe unmöglich. Eben so giebt es auch eingebildete Wurzeln, (radices imaginariæ, u. s. w. von denen wir im folgenden das nöthigste sagen werden.

Warum einige Wurzeln rational, andere irrational heissen, und was diese beede Namen bedeuten, auch ob und wie man sie deutsch ausdrucken könne.

§. 101.

Warum man zuerst von Ausziehung der Quadratwurzeln handle.

§. 101. Das erste Geschäffte bestehet also darinnen, daß wir die Wurzeln wirklich ausziehen lernen. Wir haben bisher jedesmal das leichtere zuerst vorgetragen, ehe wir zu den schwerern Aufgaben uns gewendet. Eine gleiche Sorgfalt beobachten wir bey Ausziehung der Wurzeln. Nun lassen sich die sogenannte Quadratwurzeln am leichtesten vor allen andern ausziehen: darum wollen wir mit diesen den Anfang machen. Wenn ich eine Grösse mit sich selbst multiplicire, so heißt das Product ein Quadrat, weil es in der Geometrie ein wirkliches Quadrat giebt. Darum wird die mit sich selbst multiplicirte Zahl, oder in der Geometrie die mit sich selbst multiplicirte Linie, als eine Linie, in Rucksicht auf ihr Product, die Quadratwurzel genannt. Wie man sie durch blose Zeichen ausdrücke, ist schon bekannt. Es ist also die Frage noch übrig, wie man sie in wirklichen Zahlen finden solle? und diese müssen wir jetzo beantworten.

Ursprung des Namens der Quadratwurzeln.

Eine Quadratzahl, das ist, die zweyte Dignität oder Potenz einer Grösse, entstehet, wenn man eine Grösse mit sich selbst multiplicirt; nun kann die gegebene Grösse entweder aus einem Glied oder aus mehrern Gliedern bestehen, das ist, sie kann entweder einfach oder zusammengesetzt seyn, folglich a oder $a + b$ u. s. w. heissen. Heißt sie a allein, so ist ihr Quadrat oder ihre zweyte Po-

Eine Quadratwurzel kann entweder aus einem oder aus mehrern Gliedern bestehen.

Potenz a^2; folglich ist a die Quadratwurzel von dem Quadrat a^2; das hat keine Schwürigkeit. Heißt sie aber $a + b$, so muß man das Quadrat oder die zweyte Potenz erst durch die Multiplication suchen; da dann $a + b$ die Quadratwurzel von $(a+b)^2$ seyn wird. Das Quadrat selbst wird ohne sonderliche Mühe gefunden. Man multiplicirt eben $a + b$ mit sich selbst, da dann herauskommt

$$\begin{array}{ll} a + b & \\ a + b & \\ \hline a^2 + ab & \\ \quad\quad ab + b^2 & \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 & \end{array}$$

Allgemeiner Ausdruck der wirklichen Quadrate, deren Wurzeln aus zwey Gliedern bestehen.

Demnach bestehet das Quadrat einer Wurzel von zwey Gliedern, welche man eine **binomische Wurzel** nennet, aus dem **Quadrat des ersten Gliedes,** $(a^2,)$ **ferner aus dem Quadrat des andern Gliedes** $(b^2,)$ **und aus dem doppelten Product der beeden Glieder** $(2ab)$.

Warum dieser Ausdruck für alle mögliche Quadrate auch von mehreren und wenigern Gliedern sich schicke; und wie eine jede einfache Wurzel in zwey Glieder

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für alle Quadrate; dann entweder bestehet die Wurzel aus wenigern oder aus mehr Gliedern. Besteht sie aus wenigern, so kann sie allemal in zwey Glieder vertheilt werden. Z. E. $3 = 2 + 1$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ u. s. w. Besteht sie aus mehrern, so läßt sie sich auf zwey reduciren; dann $a + b + c = (a + b) + c$; oder in Zahlen $324 =$

vertheilt, und eine von mehr Gliedern auf zwey reducirt werden könne.

300 + 20 + 4 = 320 + 4 u.s.w. Hieraus ist klar, daß der Ausdruck $a^2 + 2ab + b^2$ alle mögliche Quadratzahlen bedeuten könne. Wenn ich also eine Quadratwurzel ausziehen will, so muß ich eine Zahl finden, die mit sich selbst multiplicirt dem Ausdruck $a^2 + 2ab + b^2$ gleich wird. Weis ich nun die Kunst, aus $a^2 + 2ab + b^2$ die Quadratwurzel auszuziehen; so werde ich eine allgemeine Regel wissen, wornach ich mich in Ausziehung aller Quadratwurzeln richten kann. Ich will es dahero versuchen, und die Wurzel aus dem obigen Ausdruck wirklich ausziehen. Die Wurzel von a^2 ist a, dann a mit a multiplicirt giebt aa; wie finde ich aber b, das andere Glied der Wurzel? Ich sehe in dem Fundamental-Ausdruck, daß $2ab = 2a.b$; folglich auch, daß $b = \frac{2a.b}{2a}$; Das zweyte Glied der Wurzel wird also gefunden, wenn man das nach dem subtrahirten Quadrat des ersten Gliedes unmittelbar folgende Product durch das doppelt genommene oder mit 2 multiplicirte erste Glied der Wurzel dividirt, und sodann das Product des neuen Quotienten in den Divisor nebst dem Quadrat des zweyten Gliedes von der Zahl, woraus man die Quadratwurzel ausziehen will, subtrahirt. Denn es ist:

Wie man in Buchstaben die Quadratwurzel wirklich ausziehe?

Auflösung

und

Beweis.

$$
\begin{array}{l|l}
aa + 2ab + bb & a + b \\
aa & \\
\hline
\quad 2ab + bb & \\
\quad (2a) & \\
\quad 2ab + bb & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

§. 102. Nach dieser Regel werde ich nun leicht in wirklichen Zahlen die Quadratwurzel finden können, wenn ich mir vorhero ein Wurzeltäfelein mache, worinnen alle Quadrate bis auf neune vorkommen. Wir nehmen die Cubiczahlen mit darzu, weil wir auch nächstens die Ausziehung der Cubicwurzeln zeigen werden, und sodann nicht nöthig haben, die Tafel doppelt herzusetzen:

Wie man die Quadratwurzeln in Zahlen nach dem gegebenen allgemeinen Beweis finden könne.

Was das Wurzeltäfelein seye.

Wurzeln	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Quadratzahlen	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81
Cubiczahlen	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729

Aus dieser Tafel sehen wir, daß das gröste Quadrat der einfachen Zahlen nur aus zwey Zahlzeichen bestehe, und daß es auch einige Quadrate gebe, die sich nur durch ein einiges Zahlzeichen ausdrücken lassen. Folglich begreifft man die Regel, kraft deren man eine Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Classen eintheilt, und je-

Warum man bey Ausziehung der Wurzeln dieser Gattung die Quadratzahl in Classen eintheile, und jeder Classe nur zwey Zahlzei-

chen, und der letzten Classe zur Linken zuweilen nur ein Zahlzeichen zugeben dürfe;

der Classe zwey Zahlzeichen, der letzten zur Linken aber auch nur eins geben darf, wenn nemlich die Anzahl der Zeichen im Quadrat ungleich ist. Denn wie das einmal Eins nur bis auf neune zu wissen nöthig ist; so hat man auch bey den Quadraten nicht weiter zu wissen nöthig, weil die über neune hinausgehende Wurzeln als Wurzeln von zwey Gliedern angesehen werden. Eben so siehet man, daß die gröste Cubiczahl von den einfachen Zahlen nicht weiter als drey Zeichen bekommt; folglich wird man jetzo schon die andere Regel vorläuffig begreiffen, daß man nemlich bey Ausziehung der Cubiczahlen die gegebene Zahl in solche Classen eintheilen müsse, deren jede drey Zahlzeichen bekommt, die letzte zur Linken aber auch eins oder zwey haben kann, weil es auch Cubiczahlen von einem oder zwey Zahlzeichen giebt.

nebst einer vorläufigen Anzeige, warum man den Classen der Cubiczahlen nicht mehr als drey, am Ende aber auch nur 2 oder gar ein Zahlzeichen geben dürfe.

Um nun ein Exempel von Ausziehung der Quadratwurzel zu geben, so wollen wir die Zahl 119025 dazu nehmen, und sie erstlich in Classen eintheilen, hernach durch die allgemeine Regel §. 101. die Wurzel suchen. Die Operation ist die folgende:

Exempel von Ausziehung der Quadratwurzel, wenn nichts übrig bleibt.

```
11 | 90 | 25 ] 345
 9 |    :    [
------------------
 2 | 9.0 :
  (6 4)
 2 5 6 :
------------------
   3 4 | 25
   (6 85)
   3 4  25
------------------
       0.
```

Vollständige Erklärung des gegebenen Exempels.

Ich habe erstlich die ganze Zahl in Classen von der Rechten zur Linken getheilt, und jeder Classe zwey Zahlzeichen gegeben. Hernach habe ich von der äussersten Classe zur Linken das nächst kleinere Quadrat, welches 9 ist, abgezogen, und die Wurzel von 9, welche 3 ist, dahin gesetzt, wo man die Quotienten bey der Division hinsetzet, den Rest von $11 - 9 = 2$ aber, wie bey der unter sich gehenden Division bemerkt, so dann die folgende Classe auf gleiche Weise heruntergesetzt, ferner den neuen Divisor, $2a$, das ist im Exempel $2.3 = 6$ gesucht, und unter das erste Zahlzeichen zur Linken der folgenden Classe geschrieben, auch wirklich dividirt; da sich dann der Quotient 4 gegeben hat. Weil ich ferner das Product $2ab + b^2$ das ist, im Exempel $6.4 + 4^2$ von den obern Zahlen nach der Regel §. 101. abziehen mußte, und $2ab + b^2 = (2a + b).b$ §. 60, oder im Exempel $6.4 + 4^2 = (6 + 4).4$, so durfte ich, die Rechnung zu ver-

Wie man das zweyte Glied der Wurzel finde, und warum der Divisor, wodurch es gefunden wird, das erste Glied doppelt genommen seyn müsse.

Warum man den gefundenen neuen Quotienten nur zum Divisor hinsetzen, und hernach alles mit dem

nenen Quotienten multipliciren, und das Product von der correspondirenden Classe abziehen dürfe.

verkürzen, sogleich den vierer zum sechser hinsetzen, und hernach das ganze Product 64 mit 4 multipliciren, und dieses neue Product von nächst obigen Zahlen, welche zum Unterschied in keine () wie das erste Product eingeschlossen sind, abziehen; da ich dann zum Rest abermal die folgende Classe herabsetze. Nun suche ich wiederum einen neuen Divisor, und betrachte meine Wurzel 34 als a, folglich reducire ich die Operation auf die vorige Regeln, und sage, $2a = 2 . 34 = 68$ ist der neue Divisor, welcher unter die zu dividirende Zahl so geschrieben wird, daß sein letztes Zahlzeichen 8 unter das erste Zahlzeichen der folgenden Classe, nemlich unter den Zweyer, zu stehen kommt. Hernach dividire ich wirklich, muß mich aber zugleich hüten, daß ich den Quotienten nicht zu groß nehme, weil das folgende Quadrat b^2 auch noch von der zu dividirenden Zahl abgezogen wird. Der Quotient im Exempel ist 5, diesen setze ich wieder zum Divisor, und multiplicire die ganze Zahl mit 5, weil, wie wir schon gesagt haben, $(68 + 5) . 5 = 68 . 5 + 5 . 5$ und neben her wegen der Decimalprogression, indem 68 eigentlich 600 + 80 ist, der Ausdruck $(68 + 5) . 5 = (600 + 80 + 5) 5 = 685 . 5$. Wann nun nach geschehener Subtraction des letzten Products nichts mehr übrig bleibt, so hat man die Quadratwurzel genau gefunden,

Fortsetzung der Operation, und wie der gefundene ganze Quotient, das ist, das erste und zweyte Glied der Wurzel, zusammen genommen, als das erste Glied angesehen werde, wenn die Wurzel mehr Glieder hat.

Worauf man zu sehen habe, daß man den Quotienten nicht zu groß nehme.

den, welche im gegebenen Exempel 345 ist. Will man die Probe machen, so darf man nur die gefundene Wurzel mit sich selbst multipliciren, da dann das Product der gegebenen Quadratzahl gleich seyn muß, woferne man recht gerechnet hat.

Wie man die Probe, ob man recht gerechnet habe, machen könne.

§. 103. Es kann aber auch geschehen, daß sich die Quadratwurzel nicht genau ausziehen läßt, und am Ende noch ein ziemlicher Rest übrig bleibt. Bey diesem Fall nun fragt man billig, wie man es dann anzugreiffen habe, daß man die wahre Quadratwurzel wenigstens so nahe, als möglich und zur Noth hinlänglich ist, finden könne? Man begreifft leicht, daß es dergleichen Zahlen die Menge gebe, und daß, wenn man genau seyn wolle, eine Menge von Brüchen dißfalls zum Quotienten kommen müsse. Weil aber die Rechnung mit den Brüchen so gar weitläuftig und beschwerlich ist, und sie doch bey dieser Operation von einem genauen Rechenmeister nicht vermieden werden können; so hat man Decimalbrüche, deren Nenner in der geometrischen Progression von 1, 10, 100, 1000 u. s. w. fortgehen, dazu erwählt, welche nicht nur vor allen andern am kürzesten sich ausdrucken lassen, sondern auch bey der gegenwärtigen Rechnung von selbst sich geben. Wir wollen die Sache zuerst durch ein Exempel erläutern, ehe wir die Regeln selbst anführen

Wie man es anzugreiffen habe, wenn sich die Wurzel nicht genau ausziehen läßt, und am Ende noch ein Rest übrig bleibt,

und wie es dißfalls eine unendliche Reyhe von Brüchen geben müsse;

warum man vorzüglich Decimalbrüche darzu erwählt, und was Decimalbrüche seyen;

Exempel von solcher Rechnung.

und erweisen. Man solle die Quadratwurzel aus 3 ausziehen. Wir setzen also nach den bekannten Regeln

```
3 | 1 732/1000
1 |
------------
2. | 0.0
  (27)
1 89
------------
   11. | 0.0
   (3 | 4 3)
   1 0 2 9
   -----------
       7.1. | 0.0
      (3 4 | 6 2)
       6 9   2 4
       -----------
         1 7 6 | 0 0 u. s. w.
```

Erklärung des Exempels.

Warum man, so bald die Brüche angehen, dem Rest zwey Nullen anhängen müsse, und wie aus diesem Rest der Zehler des zu extrahirenden Bruchs gefunden werde. Warum man den Nenner nur im Sinne ausziehe, und

Denn ich sage: das nächst kleinere Quadrat von 3 ist 1, und seine Wurzel ist gleichfalls 1; 1 von 3 läßt 2. Zu diesem Zweyer setze ich zwey Nullen, welche gleichsam die folgende Classe ausmachen; damit ich aber nicht mehr herausbringe, als ich verlange, so setze ich unter 200 im Sinn den Nenner 100, da dann $\frac{200}{100} = 2$. Aus diesem unächten Bruch ziehe ich die Wurzel aus; und zwar aus dem Nenner 100, davon die Quadratwurzel allemal 10 ist, (weil $10 . 10 = 100$) nur im Sinne, damit ich nicht so viel schreiben dürfe; die Wurzel des Nenners setze ich wirklich nach dem Divisionszeichen als den Nen-

Nenner des Bruchs, dessen Zehler ich nach der allgemeinen Regel nun suchen muß. Der Divisor 2a ist hie 2. 1 = 2; 2 in 20 ist 7 mal enthalten; (dann öftermalen kann ich ihn wegen den zu subtrahirenden Producten §. 103. nicht nehmen) folglich ist 7 der Zehler zu dem ersten Bruch. Diese Zahl setze ich, wie in der ersten Operation, zum Divisor herunter, und sage, 7 mal 7 giebt 49; dahero werden 9 gesetzt, und 4 behalten; ferner 2 mal 7 giebt 14, und 4 behalten giebt 18. Das Product 189 ziehe ich von 200 ab; und dividire den Rest aufs neue durch 2a, welche in diesem Fall = 2. 17 = 34 nach §. 102. Ich muß aber dem Rest vorher wieder zwo Nullen anhängen, und aus dem abermaligen darunter verstandenen Nenner 100 die Wurzel 10 im Sinn ausziehen, und nach dem Divisionszeichen als den Nenner des Bruchs setzen, da ich dann nur eine Nulle dem vorigen Nenner anhängen darf, und sodann den Zehler 3 nach der allgemeinen Regel suchen muß u. s. w.

also das Quadrat des Nenners nicht wirklich setzen dürfe.

Fortsetzung der Operation.

Die Ursache ist leicht begreifflich. Eine jede ganze Zahl kann als ein Bruch angesehen werden, dessen Nenner eins ist. So ist $6 = \frac{6}{1}$, $18 = \frac{18}{1}$ u. s. w. folglich wird auch $6 = \frac{600}{100}$, und $18 = \frac{1800}{100}$ u. s. w. §. 65. 66. Demnach darf ich die nach Ausziehung der Wurzel übrig gebliebene Zahlen als Brüche ansehen, deren Nenner

Umständlicher Beweis dieser Rechnung.

wie man aus Brüchen die Wurzeln ausziehe,

ner 1 ist, und dahero auch den ganzen Bruch mit einer dritten Zahl, z. E. mit 100 multipliciren, ohne daß die Grösse des Bruchs geändert würde. Wie nun z. E. die Quadratwurzel aus 4 = 2, so wird, weil $\frac{400}{100} = 4$, die Quadratwurzel daraus $= \frac{20}{10} = 2$ seyn. Folglich muß ich beedes aus dem Nenner und Zehler die Wurzel ausziehen: jenes, weil es leicht ist, und man des vielen Schreibens gerne entübriget ist, thue ich bey der vorhabenden Operation im Kopf; dieses aber nach der allgemeinen Regel auf dem Papier, und fahre mit der Multiplication durch 100 so lange fort, bis ich glaube, ich fehle nunmehro kaum noch um 1 Million- oder Billiontheilchen u. s. w. Das heißt man nun die Wurzel durch die Approximation suchen, weil man ihrem wahren Ausdruck in wirklichen Zahlen dadurch immer näher kommt. Das erstemal erhält man also Zehentheile, das zweytemal Hunderttheile, das drittemal Tausendtheile, u. s. w. weil, so oft die Approximationsrechnung wiederholt wird, allemal zwey Nullen weiter angehängt werden, und bekannter massen $\sqrt{100}=10$, $\sqrt{10000}=100$, $\sqrt{1000000} = 1000$ ist, u. s. w. Da nun $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}$, oder $\frac{a}{10} + \frac{b}{100} = \frac{10a+b}{100}$ §. 67. so siehet man leicht, warum man im Quotienten zu dem Nenner bey jedesmaliger Operation nur eine Nulle, und zum Zehler

und wie eine jede Wurzel durch einen unächten Bruch ausgedruckt werden könne.

Anwendung dieses Satzes auf die vorgetragene Rechnung.

Wie weit man die Operation fortsetzen solle; und was die Approximation seye.

Warum man, so oft ein neuer Zehler gesucht wird, zwo Nullen weiter anhängen müsse,

und wie aus der Natur der Decimal-

ler die gefundene neue Zahl hinzusetzen, und im vorgegebenen Exempel anstatt $\frac{7}{10}$ + $\frac{3}{100}$ schreiben dürfe $\frac{73}{100}$ u. s. w. Denn wenn man sie wirklich unter einerley Benennung bringt, so kommt keine andere Zahl, als die bereits ausgedruckte heraus.

brüche erhelle, daß man dem Quotienten des Nenners jedesmal nur eine Nul le anhängen dürfe.

§. 104. Eine Cubiczahl entsteht, wenn man eine Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt. Z. E. aaa oder a^3 oder 3. 3. 3 = 27 sind Cubiczahlen. Diese Potenzen werden deswegen Cubiczahlen genannt, weil in der Geometrie eine dreymal mit sich selbst multiplicirte Linie einen gleich hohen, breiten und langen Cörper giebt, den man einen Cubus nennet. Nun müssen wir auch wissen, wie man Cubiczahlen wirklich ausziehe: dann die Quadrat- und Cubiczahlen kommen am öftesten vor. Eine Cubicwurzel ist diejenige Zahl, die mit sich selbst dreymal multiplicirt, die Cubiczahl giebt; so ist 2 die Cubicwurzel von 8, 3 die Cubicwurzel von 27 u. s. w. Nun fragt man, wie man diese Wurzeln wirklich finden solle? Sie können alle, wie die Quadratwurzeln, aus zwey Gliedern bestehen; folglich wollen wir die Operation abermal auf die binomische Wurzeln, dann so nennt man die aus zwey Gliedern bestehende Wurzeln, reduciren. Wir wollen also a + b zu dem allgemeinen Ausdruck aller Wurzeln machen, und ihn dreymal mit sich selbst multipliciren, so werden wir bekommen

Von Ausziehung der Cubicwurzeln.

Ursprung des Namens der Cubiczahlen.

Wie man aber Cubicwurzeln auf zwey Glieder reduciren könne.

a + b

Allgemeiner Ausdruck für alle Cubiczahlen nebst der Regel, die daraus fliesset.

$$
\begin{array}{l}
a + b \\
a + b \\
\hline
a^2 + ab \\
\quad ab + b^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 \\
\quad a + b \\
\hline
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

Diß ist der Ausdruck für alle Cubiczahlen, welchen man deßwegen, wie auch den Ausdruck für die Quadratzahlen, billig auswendig lernen und behalten solle. Wir sehen hieraus, daß eine jede Cubiczahl in sich enthält den Cubus des ersten Glieds, hernach das dreymal genommene Product des zweyten Gliedes in das Quadrat des ersten, ferner das dreymal genommene Product des ersten Gliedes in das Quadrat des zweyten, endlich den Cubus des dritten Gliedes. Wenn ich also die Cubicwurzel wirklich ausziehen will, so suche ich in dem Wurzeltäfelein die Cubicwurzel des ersten Gliedes, welches leicht zu finden ist. Hernach bemühe ich mich auch, das zweyte Glied zu bekommen. Dieses läßt sich finden, wenn man den nach Abzug des ersten Cubus vom ersten Glied übriggebliebenen Rest durch $3a^2$, das ist, durch das drey-

Wie man die Cubicwurzel wirklich ausziehe? Auflösung und Beweis;

fache

fache Quadrat des ersten Gliedes dividirt, (weil $3a^2b = 3a^2.b$, folglich $b = \frac{3a^2.b}{3a^2}$) hernach die noch übrige Producte nach und nach subtrahirt, und die Operation so lange fortsetzet, bis man die Wurzel entweder genau, oder doch so genau, als möglich ist, erhält.

Exempel in wirklichen Zahlen, wenn nichts übrig bleibt.

§. 105. Ein Exempel in Zahlen wird die Sache deutlich machen. Weil die größte Cybuszahl von den einfachen Zahlen nicht über drey Zahlzeichen in sich begreifft, so giebt man den Classen, darein sie getheilt werden, drey Zahlzeichen, doch so, daß in der letzten zur Linken auch eins oder zwey übrig bleiben können. §. 101. Hernach sucht man den nächstkleinern Cubus, welcher der äussersten Classe zur Linken correspondirt, ziehet ihn von den Zahlen dieser Classe ab, und setzet die Wurzel davon hinter das Divisionszeichen; welche hernach das erste Glied der ganzen Wurzel ist. Den abgezogenen Rest dividirt man durch das dreymal genommene Quadrat dieser erst gefundenen Wurzel, damit man das zweyte Glied bekomme, u. s. w. Z. E.

```
           47|437|928 ) 362
     a³ = 27 |    :   (
     ------------ :
           20|437 :
   Divisor 3a² = (27)      :
   Partial- ( 3a²b = 162   :
   producte ( 3ab² = 324   :
            (  b³  = 216   :
              ----------   :
   Ihre Summe = 19656      :
              ------------
         Rest = 781 | 928
   Neuer Divisor, in wel-  |
   chem a = 36; folglich
         3a² = (388|8)
   Partial- ( 3a²b = 777 6
   producte ( 3ab² =    432
            (  b³  =      8
              ----------------
   Ihre Summe =    781928
              ----------------
         Rest       0.
```

Erklärung des gegebenen Exempels; warum der Divisor allemal das dreyfache Quadrat des ersten Gliedes seye,

Denn ich sage, der nächstkleinere Cubus von 47 ist 27, seine Wurzel 3; 27 von 47 lassen 20, zu diesem Rest setze ich die folgende Classe herab. Der Divisor muß $3a^2$ seyn, folglich $3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$. welcher so unterschrieben wird, daß sein letztes Zahlzeichen unter das erste der herabgesetzten neuen Classe zu stehen kommt. 27 in 204 ist 6 mal enthalten. Weil nun 27 schon $3a^2$ ist, so bekomme ich $3a^2b$ wenn ich 27 oder den Divisor mit b oder dem gefundenen neuen Quotienten 6 multiplicire; das Product schreibe ich

warum das letzte Zahlzeichen des er-

ich also, daß sein letztes Zahlzeichen unter das erste der herabgesetzten Classe zu stehen kommt. Denn es sind weder Einheiten noch Zehner, sondern Hunderter. Das andere Product $3ab^2$ muß ich auf einem Nebenblättlein berechnen, wenn ich es nicht im Kopf genau ausfinden kann; dieses Product $3.3.6^2 = 3.3.6.6 = 324$ schreibe ich dergestalten, daß sein letztes Zahlzeichen unter das mittlere der herabgesetzten Classe gesetzt wird; denn es sind Zehner, folglich ist es eben so viel, als wenn eine Nulle noch angehängt wäre. Den Cubus des zweyten Glieds $b^3 = 6^3 = 6.6.6 = 216$ setze ich endlich also unter, daß sein letztes Zahlzeichen gerade auf das letzte der herabgesetzten Classe sich beziehet und darunter zu stehen kommt, denn es sind Einheiten der Classe; die Partialproducte werden hernach zusammen addirt, und von den correspondirenden obern Zahlen subtrahirt; damit nun der Divisor, der nicht mit addirt werden darf, keine Verwirrung verursache, so wird er gemeiniglich in () eingeschlossen. Der abgezogene Rest wird aufs neue nach eben dieser Methode dividirt; nur muß man dißfalls den ganzen Quotienten, das ist im Exempel 36 für das erste Glied annehmen; folglich wird der neue Divisor, in welchem $\underline{a} = 36$, heissen $3.36^2 = 3.36.36 = 3888$. Da denn die Division

sten Products unter das erste der folgenden Classe,

und des zweyten Products unter das mittlere,

des letzten aber, oder des Cubus von b, unter das letzte zu stehen komme.

Wie man den neuen Divisor finde, und wie in diesem Fall abermal der ganze Quotient für das erste Glied angesehen werde.

sion und hernach die Abziehung der summirten Partialproducte, wie in der ersten Operation, geschiehet.

Wie man die Sache angreiffe, wenn etwas übrig bleibt, folglich die Wurzel sich nicht genau finden läßt.

§. 106. Sollte die Wurzel nicht genau herauskommen und nach geschehener Operation noch was übrig bleiben, so hängt man dem Rest drey Nullen an, und zieht wie bey der Quadratwurzel aus dem im Sinn behaltenen Nenner 1000 die Cubicwurzel aus, welche allemal 10 ist, (weil 10. 10. 10 = 1000) setzet sie als den Nenner des Bruchs, dazu man den Zehler finden will, in die Stelle des Quotienten, und verfährt mit dieser Rechnung so lange, bis man glaubt, der Fehler seye so klein, daß man ihn keck übersehen dürfe. Die Operation selbst und der Beweis ist vollkommen einerley mit demjenigen, was wir bey den Quadratwurzeln gesagt haben; wenn man nur jedesmal, statt zwey, drey Nullen anhängt, und hernach die allgemeine Regel von Ausziehung der Cubicwurzel dabey jedesmal anbringt. Wir lassen es dahero bey einem blosen Exempel bewenden, damit wir nicht allzuweitläuftig werden. Man solle aus 12 die Cubicwurzel ausziehen. Wir setzen also nach der Regel

Beantwortung der Frage, nebst einem Exempel.

```
            1 2 | 2 128/1000
              8 |
           ------
              4 | 0.0.0
Divisor 3a² = (1 2)
Partial- ⎧ 3a²b =  2 4
Producte ⎨ 3ab² =    2 4
         ⎩   b³ =       8
         ------------------
ihre Summe   =  2 6 4 8
              ------------
                1 3 5 2 | 000
neuer Di-   3a² = ( 1 4 5 | 2)
visor in,
welchem           u. s. w.
a = 22.
```

Dann ich sage, der nächste Cubus von 12 ist 8, seine Wurzel 2; 8 von 12 lassen 4; 4 mit 1000 multiplicirt, ist 4000, oder 4 mit 3 Nullen vermehrt. Aus dem im Sinn behaltenen Nenner 1000 ist die Cubicwurzel 10; der Divisor, durch welchen ich den Zehler finde, ist $3a^2 = 3.2.2 = 12$. u. s. w. Unsere Leser sehen nun zur Genüge, daß die Approximation, wie diese Operation genannt wird, durch die Multiplication der übrig gebliebenen Zahlen in einen Bruch, dessen Zehler und Nenner gleich sind, erhalten werde. Dieser Bruch könnte nun auch ein anderer seyn, z. E. bey Quadratzahlen, $\frac{25}{25}$, $\frac{16}{16}$, $\frac{9}{9}$ u. s. w. bey Cubiczahlen $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{27}$ u. s. w. wenn nur allemal der Nenner ein vollkommenes Quadrat oder Cubus bleibt; weil es sonsten immer

Warum man dem Rest in diesem Fall 3 Nullen anhänge, und wie diese Operation sowohl bey Quadrat- als Cubiczahlen, eine Erfindung der Wurzel durch die Approximation heisse.

Beweis, daß das Anhängen der Nullen willkührlich seye, und man statt derselben auch den Rest mit

andern Quadrat-oder Cubiczahlen multipliciren könnte;

neue Brüche statt des Nenners geben würde. Man begreifft aber von selbst, daß in diesem Fall die übrige Zahlen jedesmal wirklich mit dem Zehler multiplicirt werden müßten; folglich würde man ungleich mehr Mühe und Zeit brauchen, als man durch die Multiplication mit 100 braucht; anderer Vortheile besonders mit den Decimalbrüchen, zu geschweigen. Es ist also die eingeführte Approximationsmethode die allerschicklichste und bequemste, die man nur immer in wirklichen Zahlen erfinden konnte. Will man endlich die Probe machen, so darf man nur den gefundenen Quotienten dreymal mit sich selbst multipliciren; und zum Product den Rest, wenn einer übrig geblieben ist, noch addiren.

warum aber doch die Multiplication durch die Decimalprogression, oder das Anhängen der Nullen, die schicklichste Methode seye.

Probe der bisherigen Operation.

Ob man die Ausziehung der Cubicwurzel leichter machen könne;

§. 107. Die Ausziehung der Cubicwurzeln ist bey allen Vortheilen, die man dabey anbringt, doch ungleich mühsamer als die Ausziehung der Quadratwurzel. Man hat dahero auf allerhand Mittel gesonnen, die Sache zu erleichtern. Ich will eines anführen, welches aber nur denjenigen gefallen wird, welche lieber einige schlechte lateinische Verse als eine weit kürzere algebraische Formel auswendig lernen wollen. Die ganze Kunst, die Cubicwurzel zu finden, hat ein Ungenannter in folgende Verse gebracht, welche aber einen Commentarius nöthig haben. Sie helffen:

Exempel eines ungenannten, der vorgab, er habe eine leichtere Methode zum Behuf des Gedächtnisses in einige lateinische Verse verfaßt,

Radix

Radix tota quadret, triplum divisor habebit:
Tripletur quotus, factum ducatur in ante,
In stantes duc hoc, quoti cubus additur extra.

Der erste Vers gehet den Divisor allein an, und zeiget, daß man ihn bekomme, wenn man allemal die ganze Wurzel quadrire, und das Quadrat davon dreymal nehme. Das heißt $3a^2$. Die zween folgende Verse gehen auf die Summe der Partialproducte, und wollen, man solle den neuen Quotienten mit 3 und sodann wieder mit dem vorher gefundenen Quotienten multipliciren, und dieses Product noch einmal in alle hinter dem Divisionszeichen stehende Zahlen, multipliciren, und hernach den Cubus des neuen Quotienten so dazu addiren, daß sein letztes Zahlzeichen eine einzechte Stelle zur Rechten bekommt, oder daß die Einheiten des Products zu den Zehnern des neuen Cubus u. s. w. addirt werden. Z. E. in dem §. 105. gegebenen Exempel ist das erste Product 19656 = (3.6) 3. 36 (+ 216 extra additum.) Das ist, wenn man wirklich multiplicirt

Erklärung der angeführten lateinischen Verse,

und Anwendung auf ein Exempel,

54. 36 = 1944	Das zweyte Product
+ 216	in eben diesem Exem-
19656	pel nemlich 781928
	wird nach den Vers-

 regeln

regeln seyn: 3 . 2 . 36 . 362 + 8 extra additum, dann 3. 2 heißt tripletur quotus, und 3. 2. 36. factum ducatur in ante, und 3. 2. 36. 362. in stantes duc hoc. Das ist, wenn man wirklich multiplicirt 78192, und der Cubus des letzten Quotienten 8, qui extra additur, macht 781928. Wer das extra addiren nicht recht versteht, der darf nur das ganze Product mit 10 multipliciren, und hernach den letzten Cubus nach den gewöhnlichen Additionsregeln addiren, welches der ungenannte Verfasser dieser Regel vielleicht gesagt hätte, wenn sichs in den Vers geschickt hätte, oder wenn er nicht lieber etwas ungewöhnliches hätte sagen wollen. Doch genug hievon. Ich habe meinen Lesern nur eine Probe geben wollen, wie man auch Regeln habe, welche eben nicht allemal das Sinnreiche und Witzige mit dem Gründlichen verbinden.

Beurtheilung dieser Methode.

Vorbereitung zu Newtons-Regel, die Wurzeln aus höhern Potenzen zu extrahiren, nebst einer kurzen aber gegründeten Nachricht von dem ruhmvollen Leben dieses grossen Geistes.

§. 108. Nunmehro aber kommen wir auf eine Regel, welche ihrem Erfinder die größte Ehre macht. Man hat sie dem grossen Newton zu danken, einem Manne, welcher, wie man aus seiner Lebensgeschichte weiß, neben seinen ausserordentlichen Gaben und Einsichten, durch die Furcht des HErrn, welche er zum Anfang seiner Weisheit gemacht hat, allen Liebhabern der wahren Weisheit noch weit verehrungswürdiger wird, als er der blos

gelehr-

gelehrten Welt durch die Stärke seines Geistes nur immer werden konnte. Ich würde mich bey dem Lob dieses Gelehrten in Rucksicht auf seinen Gottgefälligen Wandel noch weiter ausbreiten, wenn ich es nicht schon in meinen Betrachtungen über die Absichten der Religion gethan hätte. Jetzo genüget mir, diese Anmerkung noch zu machen, daß die gröste Gelehrten nicht nur die beste Christen seyn können, sondern daß auch das wahre Christenthum den gründlichen Wissenschaften ungemein aufhilft. Die Newtonische Erfindung, davon wir jetzo reden wollen, besteht in einer allgemeinen Regel, nach welcher man die Grössen zu allen beliebigen Potenzen theils erheben, theils aus denselbigen die verlangte Potenzen wirklich ausziehen kann. Dann es giebt bekannter massen noch mehr höhere Potenzen, als blos Cubic- und Quadratzahlen. Wir müssen dahero auch zeigen, wie man mit diesen umgehen solle. Unsere Leser wissen schon, wie man eine Grösse mit sich selbst multiplicirt. Wenn man dahero die Cubiczahl $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ nochmalen mit $a + b$ multiplicirt, so bekommt man die vierte Potenz $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; und wenn man diese Potenz nochmalen mit $a + b$ multiplicirt, so bekommt man die fünfte Potenz u. s. w. wie unsere Leser von selbsten auf einem Nebenblättlein die Berechnung machen können.

Worinnen die Newtonische Erfindung in Rucksicht auf die Wurzeln und Potenzen bestehe.

Wie die Potenzen der binomischen Wurzeln nach den ordentlichen Multiplicationsregeln gefunden werden.

Tafel der Potenzen von der ersten bis zur siebenden Potenz.

§. 109. Zu dem Ende wollen wir eine Tabell bis auf die siebende Potenz hersetzen, damit unsere Leser sehen, nach welchen Gesetzen die Glieder der Potenzen steigen und abnehmen:

$1a$	$1b$						
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$					
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$				
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$			
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$		
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$	
a^7	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$

Allgemeine Anmerkung, die Potenzen oder Dignitäten der Glieder betreffend; nemlich die Dignitäten des einen Gliedes nehmen ab, wie die Dignitäten des andern zunehmen.

Aus dieser Tabelle siehet man schon, daß die Exponenten des zweyten Glieds abnehmen, wie die Exponenten des ersten Gliedes zunehmen. Wenn man also zwo Progressionen, davon die eine in eben der Verhältniß abnimmt, in welcher die andere steigt, untereinander schreibt, so werden die beederseitige Producte die Glieder der neuen Potenz geben. Z. E.

$$\begin{array}{cccccc} a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a, & 1 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 \\ \hline a^5 & a^4b & a^3b^2 & a^2b^3 & ab^4 & b^5, \end{array}$$

Wie man die vor den Po-

welches die fünfte Dignität von $a + b$ wäre, wenn die Zahlen, oder Coefficienten,

oder

oder Unzen, wie sie auch genennt werden, nemlich 1, 5, 10, 10, 5, 1 vollends dabey stünden. Da nun diese Unzen oder Coefficienten bey einer jeden Dignität sich ändern; so fragt sich nun, ob man keine allgemeine Regel wie für die Dignitäten selbst, also auch für die Coefficienten geben könne. Wann man die obige Tabell ansiehet, so findet man, daß die Coefficienten durch das Product der Exponenten der ersten Progression von a, dividirt durch das Product der Exponenten der zweyten Progression von b, oder überhaupt das Product der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen, entstehen können. Z. E.

tenzen stehende Zahlen nenne? wir heissen sie nemlich am schicklichsten Coefficienten.

Eine Regel für die Coefficienten, wie solche aus der Tabell durch die Introduktion sich erweisen läßt.

Die Exponenten von a sind 5, 4, 3, 2, 1.
natürliche Zahlprogr. 1, 2, 3, 4, 5.

folglich der Coefficient vom

zweyten Glied	$\frac{5}{1} = 5$
vom dritten	$\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$
vom vierten	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = 10$
vom fünften	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{120}{24} = 5$
vom sechsten	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{120}{120} = 1.$

Eben so findet man die Coefficienten der sechsten, siebenden und anderer Dignitäten; oder überhaupt, wenn der Exponent von dem ersten Glied m wäre, so giebt es folgende Progression:

Wie man die Progression der Potenzen selbst noch allgemeiner austrucken.

$a^m, a^{m-1}b, a^{m-2}b^2, a^{m-3}b^3, a^{m-4}b^4, a^{m-5}b^5$ u. s. w.

Dann es ist eben so viel, wenn ich in der obigen Progression setze,

$$\begin{cases} a^5, a^{5-1}b, a^{5-2}b^2, a^{5-3}b^3, a^{5-4}b^4, a^{5-5}b^5 \\ a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5 \end{cases}$$

und folglich auch die Regel für die Coefficienten auf einen allgemeinen Ausdruck reduciren könne.

Man wird dahero diesen allgemeinen Ausdruck für alle Potenzen verstehen; folglich auch die Coefficienten nach der beobachteten Regel finden, da nemlich die Progressionen

$$\begin{matrix} m, & m-1, & m-2, & m-3, & m-4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

geben werden den Coefficienten für das zweyte Glied $\frac{m}{1}$

für das dritte $\frac{m.m-1}{1.2}$

für das vierte $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$

für das fünfte $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$ u. s. w.

Denn wenn m in Zahlen gegeben wird, so muß sich die Progression endigen; z. E. wenn $m = 5$, ist $m - 5 = 0$, folglich das ganze Product null, und die Progression höret auf.

Warum dieser Beweis, unerachtet er eine blose Induction

§. 10. Dieser Beweis ist nun eine Induction, und freylich nicht so scharf, als wenn er eine mathematische Demonstration wäre. Allein man mag den Versuch machen,

machen, bey was für einer Potenz man will, so wird man finden, daß die Regel wahr und gewiß seye. Inzwischen hat man doch in neuern Zeiten auf Beweise gesonnen, welche vollkommene mathematische Demonstrationen heissen können. Ich will einen hier anführen, den ich vor mehrern Jahren schon in der von mir herausgegebenen Lettre sur quelques paradoxes du calcul analytique aufgesetzt, und zu Berlin in der Schule des berühmten Hrn. Prof. Eulers gelernet habe. Wir wollen die Coefficienten mit den grössern Buchstaben des Alphabets bezeichnen, und das eine Glied der Wurzel a, das zweyte x, den Exponenten aber n nennen: so wird seyn

ist, doch allgemein seye; und ob man ihn nicht auf eine andere Art, was nemlich die Coefficienten betrifft, demonstriren könne.

$$(a+x)^n = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 + Ca^{n-3}x^3 \text{ u. s. w.}$$

dieses hat keine Schwürigkeit. Wenn wir nun die Summe der Progression S heissen; so wird $(a+x)^n = S$; diesen Ausdruck solle man differentiiren. Wir brauchen einen Lehnsatz dazu, nach welchem man den Exponenten n um eins verringert, und hernach alles mit ndx multiplicirt; folglich ist $n(a+x)^{n-1}dx = dS$ oder die Differentialgrösse von S, welche durch dS ausgedruckt wird. Die Differentialgrösse von a ist = o, weil es als eine beständige Grösse angesehen wird, welche weder ab- noch zunimmt. Alles dieses solle an seinem Ort umständlich erwiesen werden. Es ist also

Allgemeine mathematische Demonstration für die Regel der Coefficienten, welche aber Anfänger so lange noch über-

schlagen können, bis sie die Fluxionenrechnung gelesen und verstanden haben.

$n(a+x)^{n-1}dx = dS$; folglich §. 9. 58. 59. wenn gleiches mitt gleichem dividirt wird,

$(a+x)^n \;=\; S$

$$\frac{n\,dx}{a+x} = \frac{dS}{S}$$

——————————— §. 9.

$$n\,dx = \frac{(a+x)dS}{S}$$

——————————— und

$$nSdx = (a+x)dS$$

——————————— : dx

$$nS = (a+x)\frac{dS}{dx} \text{ folglich}$$

$$(a+x)\frac{dS}{dx} - nS = 0.$$

Den Werth dieser auf Nulle reducirten Gleichung muß man nun in der obigen Progression ausdrucken:

weil $S = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2$ u. s. w.

so ist $dS = 0 + Aa^{n-1}dx + 2Ba^{n-2}xdx + 3Ca^{n-3}x^2dx$ u. s. w.

und $\frac{dS}{dx} = 0 + Aa^{n-1} + 2Ba^{n-2}x + 3Ca^{n-3}x^2$ u. s. w.

folglich, wenn man beederseits mit $a+x$ multiplicirt $(a+x)\frac{dS}{dx} =$

$$0 + Aa^{n} + 2Ba^{n-1}x + 3Ca^{n-2}x^2 + 4Da^{n-3}x^3 \text{ f.}$$
$$+ Aa^{n-1}x + 2Ba^{n-2}x^2 + 3Ca^{n-3}x^3 \text{ f.}$$

so

so hat man, weil

$$-nS = -na^n - nAa^{n-1}x - nBa^{n-2}x^2 \text{ u. s. f.}$$

$$(a+x)\frac{dS}{dx} - nS = o + (Aa^n - na^n)$$
$$+ (2Ba^{n-1}x + Aa^{n-1}x - nAa^{n-1}x)$$
$$+ (3Ca^{n-2}x^2 + 2Ba^{n-2}x^2 - nBa^{n-2}x^2)$$
$$+ 4Da^{n-3}x^3 + 3Ca^{n-3}x^3 - nBa^{n-2}x^2)$$

Da nun dieses zusammen Nulle ist, und die Coefficienten beständige Grössen sind, die von x nicht abhangen, so wird ein jedes Glied Nulle seyn; folglich

I. $Aa^n - na^n = o$

II. $2Ba^{n-1}x + Aa^{n-1}x - nAa^{n-1}x = o.$

III. $3Ca^{n-3}x^2 + 2Ba^{n-2}x^2 - nBa^{n-2}x^2 = o$

Aus der ersten Gleichung finden wir also, weil $Aa^n - na^n = o$,

$$Aa^n = na^n$$
$$\overline{\qquad\qquad} : a^n$$
$$A = n$$

Aus der zweyten Gleichung ergiebt sich folgende:

$$2Ba^{n-1}x = nAa^{n-1}x - Aa^{n-1}x$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : a^{n-1}x.$$
$$2B = nA - A.$$
$$= (n-1)A \text{ §. 60.}$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$B = \frac{(n-1)}{2}A$$

Aus der dritten Gleichung kommt heraus

$$3Ca^{n-2}x^2 = nBa^{n-2}x^2 - 2Ba^{n-2}x^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : a^{n-2}x^2$$
$$3C = nB - 2B = (n-2)B$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : 3$$
$$C = \frac{n-2}{3}B.$$

Da

Da nun $A = n$.

$$B = \frac{n-1}{2} A.$$

$$C = \frac{n-2}{3} B:$$

so werden die Coefficienten, wenn man die Werthe dafür setzt, heissen:

$$A = n$$

$$B = \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

Was die so genannte Wundertafel sey.

§. 111. Diesen Beweis kann man nun überschlagen, bis man das letzte Capitel im folgenden Theil gelesen und verstanden hat. Wir haben unsern Lesern dadurch zeigen wollen, daß man auch diese wichtige Newtonische Regel demonstriren könne. Einige andere haben vorzeiten die sogenannte Wundertafel (Tabulam mirificam) zu Hülfe genommen und damit verglichen; sie entstehet, wenn man die in natürlicher Ordnung fortlauffende Zahlen so oft addirt, als die Progression es erfordert. Z. E.

Δ

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Die

Die erste Reyhe enthält Einser, die zweyte alle Zahlen in der gewöhnlichen Zahlenprogression, die dritte finde ich, wenn ich die unmittelbar vorhergehende Reyhe addire, und sage, 1 und 2 sind 3, und 3 sind 6, und 4 sind 10, und 5 sind 15, und 6 sind 21; die vierte finde ich, wenn ich die dritte addire; 1 und 3 sind 4, und 6 sind 10, und 10 sind 20, und 15 sind 35, und 21 sind 56; die fünfte finde ich, wenn ich auf eben diese Weise die vierte addire; nemlich 1 und 4 sind 5, und 10 sind 15, und 20 sind 35, und 35 sind 70; u. s. w. Aus dieser Triangulartabelle siehet man nun, daß durch die vorgenommene Additionen zerschiedene Polygonal- und Pyramidalzahlen herauskommen. Das aber ist das besondere dabey, daß die horizontale Zahlreyhen jedesmal die Coefficienten von derjenigen Dignität geben, deren größter Exponent das zweyte Zahlzeichen in der Reyhe ist. Inzwischen ist die allgemeine Methode, die Coefficienten zu finden, deßwegen vorzuziehen, weil man sonsten die Tabelle bis auf tausend und mehr Zahlen fortsetzen, folglich allzu weitläuftig dabey werden müßte. Uebrigens kann man auch durch den Ausdruck für die Coefficienten, nemlich

und wie ferne man die Newtonische Regel für die Coefficienten dadurch erläutern könne.

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}\text{ u. s. w.}$$

eine

eine neue Combinationsregel, davon wir schon §. 99. gehandelt haben, noch ausführlicher erklären. Wenn z. E. sechs Buchstaben so combinirt werden sollen, daß das erstemal je zween und zween, hernach drey, ferner vier u. s. w. zusammen kommen; so werden die Regeln nach eben diesem Gesetze sich richten, wie man leicht die Probe mit Buchstaben u. s. w. selbst machen kann.

Aus dem bisherigen wird die Newtonische Regel selbst erwiesen, ihr allgemeiner Ausdruck

§. 112. Nunmehro können wir erst recht den grossen Nutzen der Newtonischen Regel zeigen, nachdeme wir den Beweis der Progreßion gegeben haben. Der allgemeine Ausdruck für alle nur denkbare Potenzen ist,

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 \text{ u. s. w.}$$

Nun wollen wir diesen Ausdruck noch schicklicher und kürzer schreiben lernen, damit man ihn desto besser auswendig lernen und behalten kann. Wir wissen aus

wird in einen andern gleichgültigen verwandelt,

§. 57. daß $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$ und $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ u. s. w.

folglich wird die obige Progreßion, wenn man gleiches für gleiches setzt, also aussehen

$$a^m + \frac{m}{1} \frac{a^m b}{a} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \frac{a^m b^2}{a^2}$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^m b^3}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

Der

Der Ausdruck $\frac{b}{a}$ kommt in allen Gliedern ausser dem ersten, vor. Wir wollen ihn dahero mit einem Buchstaben Q benennen, Und weil das erste Glied auch in allen folgenden Gliedern wieder vorkommt, so wollen wir seine Wurzel P, folglich das erste Glied P^m nennen. Dieses giebt nun die der obigen ganz gleiche Progression

und noch kürzer vorgetragen.

$$P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3 \text{ u. s. w.}$$

Aus dieser Progression sehen wir, daß das erste Glied im zweyten, und das zweyte im dritten, und das dritte im vierten u. s. w. ganz enthalten seyen. Dann z. E. das dritte Glied $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2$ ist nichts anders, als das zweyte Glied multiplicirt mit $\frac{m - 1}{2} Q$, das ist $\left(\frac{m}{1} P^m Q\right) \cdot \left(\frac{m - 1}{2} Q\right)$

Beweis, warum man die Regel so kurz ausdrücken könne.

Damit wir nun nicht so viel schreiben dürfen, so wollen wir das erste Glied A, das zweyte B, das dritte C, das vierte D u. s. w. nennen, hernach jedesmal den vorhergehenden kürzen Ausdruck in dem unmittelbar folgenden Glied für seinen gleichen Factor substituiren, und das Q mit seinem Coefficienten damit multipliciren. Wenn

also

also $P^m = A$, so ist $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} AQ$, und weil wir diesen letzten Ausdruck B nennen, so ist das folgende Glied $\frac{m.m-1}{1.2} P^m Q^2 = \frac{m-1}{2} BQ$. und weil dieses C heissen soll, so wird das nächste $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 = \frac{m-2}{3} C Q$ u. s. w. Demnach heißt die endliche und letzte der ersten aber vollkommen gleiche Progreßion: $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ$ u. s. w. Das ist der Newtonische Ausdruck, den man auswendig lernen und behalten muß, wenn man im folgenden den grossen Nutzen, den er über alle mathematische Wissenschaften ausbreitet, gründlich erlernen will. Diese einige algebraische Linie enthält mehr gründliches, zuverläßiges, wichtiges, fruchtbares und sinnreiches in sich, als oft ganze Bücher kaum enthalten. Das witzige und sinnreiche dabey werden diejenigen leicht begreiffen, welche sich in einer scharfsinnigen Beobachtung der Aehnlichkeit üben, und dahero im Stande sind, dem grossen Erfinder

Der kürzeste Ausdruck der Regel selbst, den man deßwegen dem Gedächtniß leicht einprägen kann.

allgemeine Nutzbarkeit der Newtonischen Regel.

findet auch in diesem Theil der schönen Wissenschaften ein wahres Lob zu geben.

§. 113 Unsere Leser werden nun auch einige Exempel von der Nutzbarkeit dieser Regel zu sehen wünschen. Denn wir haben schon gesagt, daß man dadurch leicht alle mögliche Zahlen zu allen möglichen Potenzen erheben und auch aus allen Zahlen alle Wurzeln durch die Approximation ausziehen könne. Im letztern Falle ist m ein Bruch: denn wie z. E. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ §. 58. so ist auch $\sqrt[n]{P^m} = P^{\frac{m}{n}}$. Will man aber die Sache ganz ausgedruckt wissen, so wird die gegebene Progression heissen:

Anwendung der Regel auf besondere Fälle, besonders auf die Ausziehung der Wurzeln.

$$P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ \text{ u. s. w.}$$

Ich stelle es nun meinen Lesern frey, welchen von beeden Ausdrücken sie lernen wollen: denn alle beede zugleich sind unnöthig; die Mathematik überhäuft einen nicht mit Regeln. Lernen sie den ersten, so merken sie nur, daß, bey Ausziehung der Wurzeln, m ein Bruch ist, dessen Nenner der Exponent derjenigen Wurzel ist, die man verlangt. Lernet man aber den letztern, so behält man nur dieses, daß n = 1, wenn man eine Zahl zu einer Dignität oder Potenz erheben solle; denn weil 1 nicht dividirt, so ist es in diesem Fall eben so viel, als wenn das n gar nicht da stünde. Ge-

Anwendung auf wirkliche Zahlzeichen, bey Erhebung zu Potenzen.

setzt nun, es wollte einer die Zahl 5 zur zweyten Dignität erheben; so wird er, damit ich ein recht leichtes Exempel gebe, 25 bekommen, weil $5 . 5 = 25$. Nach der Newtonischen Regel muß aber die Wurzel zwey Glieder $a + b$ haben: wir müssen also 5 theilen, z. E. in $2 + 3 = 5$. Man verlangt demnach das Quadrat von $2 + 3$.

P ist also $= 2, = a, Q = \frac{3}{2} = \frac{b}{a}$ und $m = 2$.

Folglich $P^m = 2^2 = 4 = A$

$mAQ = 2 . 4 . \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12 = B$.

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{2-1}{2} . 12 . \frac{3}{2} = \frac{1 . 12 . 3}{2 . 2} = \frac{36}{4}$

$= 9 = C$.

$\frac{m-2}{3} BQ = \frac{2-2}{8} . 9 . \frac{3}{2} = 0$ weil $2 - 2 = 0$.

Folglich hört die Rechnung bey dem vierten Glied auf; und die Glieder sind $4 + 12 + 9 = 25$. Unerachtet nun dieses Exempel leichter im Kopf gerechnet wird, so begreiffen doch unsere Leser von selbst, daß es schwerere giebt; z. E. man verlangt die sechste Potenz von 28, das ist von $20 + 8$. so ist $P = 20$ und $Q = \frac{8}{20}$ und $m = 6$. da dann die Rechnung sich bald geben wird.

bey Ausziehung der Irrationalwurzeln, sowohl in Zahlen,

Eben so findet man durch diese Regel alle Wurzeln. Z. E. was ist $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. Weil $2 = 1 + 1$. so ist $P = 1$ und $Q = \frac{1}{1} = 1$ und $m = \frac{1}{2}$, oder nach dem zweyten

Ausdruck $m = 1$ und $n = 2$. oder $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

demnach $p^{\frac{m}{n}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 = A$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} . 1 . 1 = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1-2}{2.2} . \frac{1}{2} . 1 = -\frac{1}{4} . \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1-2.2}{3.2} . -\frac{1}{8} . 1 = -\frac{3}{6} . -\frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{6.8} = \frac{1}{2.8} = \frac{1}{16} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{1-3.2}{4.2} . \frac{1}{16} = -\frac{5}{8} . \frac{1}{16} = -\frac{5}{128} = E.$$

Folglich ist die Quadratwurzel aus 2 oder $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128}$ u.s.w. Diese zwey Exempel sollen dißmalen genugsam seyn, etwas von dem Nutzen unserer Regel bekannt zu machen. Denn unsere Leser erkennen von selbst, daß man, wie die gegenwärtige zwey, also noch viele tausend andere in Zahlen und Buchstaben auflösen könne wenn man nur jedesmal eine gegebene Grösse in zwey Glieder nach Belieben theilt; welches bey allen Grössen, wie wir schon bewiesen haben, geschehen kann, wie dann auch alle zusammengesetzte Grössen oder multinomische Wurzeln auf zwo sich reduciren lassen. Will man auch ein Exempel in Buchstaben, so sölle es $a^2 + x^2$ seyn. Man ziehe die Quadratwurzel daraus: folglich wird

als auch in Buchstaben.

$P = a^2$, $Q = \frac{x^2}{a^2}$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, demnach

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2}{2a} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1-2}{4} \cdot \frac{x^2}{2a} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{-1x^4}{4.2 1^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1-4}{6} \cdot \frac{-1x^4}{8.a^3} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot x^6}{6.8a^5}$$

demnach ist $\sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$ u. s. w. Wir werden uns im folgenden, besonders bey der Fluxionenrechnung, auf diese Newtonische Regel mehrmalen berufen; dahero man sich in der Privatübung mit dergleichen Aufgaben noch ein Zeitlang beschäfftigen kann. Die Namen der binomischen und multinomischen Wurzeln haben wir schon gehöret. Jene bestehen aus zwey, diese aus mehren Gliedern der Wurzel. Weil sich aber alle auf die binomische reduciren lassen, so siehet man, daß sich alle Aufgaben dieser Art durch die Newtonische Regel auflösen lassen. Und das ist nun alles, was wir von dieser wichtigen Lehre sagen wollten.

Warum diese Regel nicht nur auf binomische, sondern auch auf multinomische Wurzeln sich anwenden lasse, nebst einer kurzen Erklärung der gemeldeten Namen.

Wie man die Irrationalgrössen behandeln soll.

§. 114. Nach unserer gemachten Ordnung handeln wir jetzo von Irrationalgrössen, wie auch von den blos eingebildeten

Grös-

Grössen. Irrationalgrössen sind alle diejenige Wurzeln, die sich durch keine endliche Zahlen ausdrücken lassen. Z. E. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{ax}$ u. s. w. Denn alle diese Ausdrücke sind so beschaffen, daß sie nach der Newtonischen in eine unendliche Reyhe aufgelöset werden. Nun kann eine Irrationalgrösse aus Rationalgrössen zum Theil bestehen; wie z. E. $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2}$, da dann 8 ein vollkommener Cubus ist. Folglich siehet man schon, daß man die Irrationalgrössen zum Theil von ihrer Irrationalität befreyen könne, wenn sich die Grösse hinter dem Wurzelzeichen in zween Factores vertheilen läßt, davon der eine diejenige Dignität ist, deren Wurzel man verlangt. So ist $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = 2\sqrt[3]{2}$. Oder überhaupt $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{\frac{n}{m}} x^{\frac{m}{m}} = a^{\frac{n}{m}} x = x\sqrt[m]{a^n}$. In dieser Kunst muß man sich vorzüglich üben, weil sie zu schicklichern Ausdrücken Gelegenheit giebt, und solche Ausdrücke die Rechnung ungemein erleichtern. So ist $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3}$ u. s. w.

Und in wie ferne man sie zum Theil von ihrer Irrationalität befreyen und schicklicher ausdrucken könne.

§. 115. Wie man die vier Species oder Rechnungsarten bey allen Grössen anbringen kann, so kann man auch die Irrationalgrössen darnach behandeln. Sie lassen sich nemlich addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren. Bey der Addi-

Wie man die vier Rechnungsarten bey Irrationalgrössen anbringen könne.

Addition und Subtraction muß man sie, wie die Brüche, vorher unter gleiche Benennungen bringen; das ist, es müssen nicht nur Wurzeln von einerley Dignitäten seyn, sondern die hinter dem Wurzelzeichen stehende Grössen müssen einander gleich seyn. Z. E. $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[s]{y^r}$ werden folgender Gestalt unter einerley Benennung gebracht: $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ und $y^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{y^r}$ folglich $x^{\frac{n}{m}} + y^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{ns}{ms}} + y^{\frac{rm}{ms}} = \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{rm}}$. Oder in Zahlen; $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4.2} + \sqrt{9.2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$. Diese zwo Grössen lassen sich wirklich addiren, weil beederseits hinter dem Wurzelzeichen einerley Grösse, nemlich 2 stehet. Ihre Summe ist also $5\sqrt{2}$. Hingegen $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ lassen sich anders nicht addiren, als durch das dazwischen gesetzte Zeichen plus, weil die Grössen hinter dem Wurzelzeichen ungleich sind, und sich nicht schicklicher ausdrucken lassen. Eben so geht es bey der Subtraction, z. E. $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = \sqrt{2}$; hingegen $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ heißt eben $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ und läßt sich nicht anders ausdrucken, weil die Grössen hinter dem Wurzelzeichen verschieden sind. In der Multiplication werden

Von der Addition und Subtraction der Irrationalgrössen.

den die Grössen vor und hinter dem Wurzelzeichen mit einander multiplicirt, wenn es Wurzeln von einerley Dignitäten sind; z. E. $\sqrt{3}.\sqrt{2} = \sqrt{6}$; $2\sqrt{5}.3\sqrt{2} = 6\sqrt{10}$ u. s. w. Sind es aber Wurzeln von verschiedenen Dignitäten, so sucht man sie vorher zu Wurzeln von einerley Dignitäten zu machen, wie wir gezeigt haben. Eben so geht es bey der Division; indeme die Grössen hinter dem Wurzelzeichen durch einander dividirt werden, wenn es Wurzeln von gleichen Potenzen sind.

Von ihrer Multiplication und Division.

Z. E. $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.
Oder in zusammengesetzten Grössen,

$$\begin{array}{l|l} & \sqrt{15} - \sqrt{6} \,|\, \sqrt{5} - \sqrt{2} \\ (\sqrt{3}) & \\ & \underline{\sqrt{15}} \\ & \quad - \sqrt{6} \\ & \underline{(\sqrt{3}) - \sqrt{6}} \\ & \qquad 0. \end{array}$$

Will man die Probe machen, so wird $(\sqrt{5} - \sqrt{2}).(\sqrt{3}) = \sqrt{15} - \sqrt{6}$, welches die zu dividirende Grösse war. Damit nun unsere Leser überzeugt werden, daß diese Regeln richtig seyen, so wollen wir vollkommene Potenzen hinter die Wurzelzeichen setzen. Man solle addiren $\sqrt{4} + \sqrt{4}$ so hat man $2\sqrt{4} = 2.2 = 4$. Da nun $\sqrt{4} = 2$ und folglich der Ausdruck $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2$. so sieht man, daß die Additionsregel richtig, und da-

Wie man den Beweis der vorgeschriebenen Rechnung auch der Einbildungskraft

begreiflich machen könne.

dahero auch $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ seye, wenn nemlich die Grösse hinter dem Wurzelzeichen keine solche Potenz ist, aus deren die Wurzel in endlichen Zahlen gegeben werden kann. Eben diese Methode läßt sich auch auf die Subtraction anwenden. Mit der Multiplication und Division wollen wir ein gleiches versuchen. Man solle $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{9}$ multipliciren: wir wissen schon, was herauskommen muß, nemlich 6; weil $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; und $2 . 3 = 6$. Wenn wir nun die Grössen hinter den gleichen Wurzelzeichen miteinander multipliciren, so bekommen wir $\sqrt{4 . 9} = \sqrt{36} = 6$. wie in der gewöhnlichen Rechnung. Und wenn man $\sqrt{16}$ durch $\sqrt{4}$ dividirt, so bekommt man 2; weil $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{4} = 2$ und $4 : 2 = 2$. Nach der Regel dividire ich die Zahlen hinter dem Wurzelzeichen, da ich dann $\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = 2$, wie in der gewöhnlichen Rechnung, bekomme. Also haben die Regeln ihre vollkommene Richtigkeit; und unsere Leser sehen zugleich in einem neuen Exempel, wie man der Einbildungskraft durch Hülfe der Reduction auf ähnlichere und leichtere Fälle, auch das, was blos der Verstand begreifft, gleichsam vor die Augen hinmahlen könne.

Was eingebildete Grössen seyen.

§. 116. **Eingebildete Grössen** sind solche Grössen, welche weder positiv noch negativ, und noch vielweniger Nullen

sind

sind. Z. E. $\sqrt{-2}$. wenn nemlich hinter dem Wurzelzeichen das Zeichen minus der Grösse vorgesetzt wird. Sie sind weder positiv noch negativ, sonst würde $-2 = +2$ seyn. Sie sind aber auch nicht Nullen, sonst wäre $-2 = 0$. Folglich sind es eingebildete Grössen, und das ist der Grund dieser Benennung. Denn man darf deßwegen nicht denken, daß es contradictorische Grössen seyen; indeme die obige Erklärung blos auf den mathematischen Operationen beruhet. Im philosophischen Verstand sind es dennoch positive Grössen: dann was man sich vorstellen, einbilden und denken kann, ist positiv. Z. E. in der Geometrie sind negative Grössen diejenige, welche eine der positiven entgegen gesetzte Richtung haben. Nun kann ich eine solche Grösse als ein Quadrat ansehen, welches z. E. -4 seyn solle; also läßt sich auch die Seite des Quadrats denken, welche $\sqrt{-4}$ heissen wird. In der Arithmetik kann zwar kein Quadrat $-a^2$ seyn: denn entweder ist die Wurzel $-a$ oder $+a$: ist sie $-a$, so ist das Quadrat $+a^2$, weil minus mit minus plus giebt; ist sie $+a$, so ist das Quadrat vorhin $+a^2$. Allein nach der obigen Erklärung läßt sich doch wenigstens in der Geometrie eine solche Wurzel denken.

(quantitates & radices imaginariæ)

Ob solche Grössen wenigstens im philosophischen Verstand nichts positives seyen, und wie ferne man sich selbige einbilden und vorstellen könne.

Wie man die eingebildete Grössen kürzer ausdrücke, wie man sie addire und subtrahire,

§. 117. Die vier sogenannte Species lassen sich auch bey dieser Gattung von Wurzeln anbringen. Man kann sie nicht nur kürzer ausdrücken, sondern auch addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren. Dann z. E. $\sqrt{-18} = \sqrt{9 \cdot -2} = 3\sqrt{-2}$. $\sqrt{-8} = \sqrt{4 \cdot -2} = 2\sqrt{-2}$. u. s. w. das heißt man kürzer ausdrucken §. 114. Die Addition und Subtraction geschiehet, wie bey den andern Irrationalgrössen. Z. E. $3\sqrt{-2} + 2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2}$ und $3\sqrt{-2} - 2\sqrt{-2} = 1\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$. Das hat keine Schwürigkeit. In der Multiplication befolgt man abermal die Regel §. 115. nur mit dem Unterscheid, daß das hinter dem Wurzelzeichen stehende Zeichen minus durch die Multiplication nicht verändert wird; indeme die Regel, einerley Zeichen geben plus, zerschiedene minus, nur auf die vor dem Wurzelzeichen stehende Zeichen sich anwenden läßt. Z. E. $\sqrt{-3} \cdot 2\sqrt{-3}$ ist $2\sqrt{-6}$. und $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{-15}$ und $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{-9} = -3$. Denn wenn plus durch die Multiplication herauskäme, so würden die eingebildete Wurzeln aufhören, solche zu seyn, und in wahre verwandelt werden; welches aber wider ihre Eigenschaft streitet, wie wir §. 116. erwiesen haben. Das Product von $\sqrt{-5} - \sqrt{-7} + \sqrt{-2}$

wie man sie multiplicire und dividire,

und warum durch die Multiplication das hinter dem Wurzelzeichen stehende Zeichen nicht verändert werde;

multiplicirt mit $\sqrt{-3}$

ist also $\sqrt{-15} - \sqrt{-21} + \sqrt{-6}$.

Eben

Eben diese Regel beobachtet man bey der Division; da z. E. $\sqrt{-6} : \sqrt{-2} = \sqrt{-\frac{6}{2}} = \sqrt{-3}$ ist u. s. w. Diß ist die Lehre von den eingebildeten Wurzeln. Daß es endlich auch Grössen gebe, die ein doppeltes Wurzelzeichen wie z. E. $\sqrt{\sqrt{6}}$ vor sich haben, wird man leicht begreiffen. Man darf nur z. E. die vierte Potenz von 2 nemlich 16 nehmen, so wird $2 = \sqrt{\sqrt{16}}$ seyn; das ist, weil $\sqrt{16} = 4$ ist, $\sqrt{4}$ oder $\sqrt[4]{16} = 2$. Diese Grössen werden wie die Irrationalgrössen §. 115. 116. behandelt; wir wollen unsere Leser daher nicht länger damit aufhalten.

Ob es auch Grössen gebe, die ein doppeltes Wurzelzeichen haben, und wie diese zu behandeln seyen.

§. 118. Es ist noch übrig, daß wir die letzte Eigenschaft der Wurzeln in Absicht auf ihre Dignitäten vollends erklären. Man kann nemlich fragen, ob eine gegebene Dignität nur eine oder mehr Wurzeln habe, und wenn sie mehr als eine hat, ob und wie man ihre Anzahl bestimmen könne. Unsere Leser werden schon vorläufig merken, daß die Antwort auf die Mehrheit der Wurzeln ausfallen wird. Denn wenn sie nur eine Quadratzahl betrachten, so sehen sie schon, daß sie aus der Multiplication zweyer Wurzeln erzeugt werden kann: das Quadrat 9 hat die Wurzel + 3; sie kann aber auch die Wurzel − 3 haben: dann $-3 \cdot -3 = +9$. So ist überhaupt $a^2 = a \cdot a$, ist aber

Ob eine gegebene Potenz nur eine oder mehr Wurzeln habe,

und wenn sie mehr als eine hat, ob man nicht bestimmen könne, wie viel und was für es seyen.

aber auch $= -a . -a$. also sind die Wurzeln $+a$ und $-a$. Bey Cubiczahlen wird es vielleicht noch mehr Wurzeln geben, u. s. w. Wir wollen dahero sehen, ob wir keine allgemeine Regel, die Wurzeln zu bestimmen, erfinden können. Wenn wir Gleichungen machen, so viel wir wollen, und sie alle auf Nulle reducirt, miteinander multipliciren, so kann es geschehen, daß wir einen Weg finden, unsere Frage aufzulösen. Es seye demnach $x = 2$ so ist $x - 2 = 0$, ferner $x = 3$ so ist $x - 3 = 0$, und endlich $x = 4$ so ist $x - 4 = 0$, folglich

Vorbereitung zur Auflösung der vorgelegten Frage, wenn man zerschiedene Gleichungen auf Nulle reducirt.

$$\begin{array}{l}
x - 2 = 0 \\
x - 3 = 0 \\
\hline
x^2 - 2x \\
\quad - 3x + 6 \\
\hline
x^2 - 5x + 6 = 0. \\
\quad x - 4 \\
\hline
x^3 - 5x^2 + 6x \\
\quad - 4x^2 + 20x - 24. \\
\hline
x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.
\end{array}$$

Oder wenn wir Buchstaben nehmen, und setzen

$$\begin{array}{ll}
x = a \text{ folglich} & x - a = 0 \\
x = b \text{ folglich} & x - b = 0 \\
x = c \text{ folglich} & x - c = 0
\end{array}$$

so bekommt man durch die Multiplication

$x - a$

$$
\begin{array}{l}
x - a \\
x - b \\
\hline
x^2 - ax \\
\quad - bx + ba \\
\hline
x^2 - \left\{ \begin{array}{l} ax \\ bx \end{array} \right. + ba \\
\quad x - c \\
\hline
x^3 - \left\{ \begin{array}{l} ax^2 \\ bx^2 \end{array} \right. + bax \\
\quad - cx^2 + \left\{ \begin{array}{l} acx \\ bcx \end{array} \right. - bac \\
\hline
x^3 - (a+b+c)x^2 + (ba+ac+bc)x - bac = 0
\end{array}
$$

Da nun für x gesetzt werden kann a, b, c, oder in Zahlen 2, 3, 4, und die Gleichung allemal Nulle werden wird, wie sich leicht die Probe machen läßt; so sieht man, daß die letzte Gleichung drey wahre Wurzeln habe, nemlich a, b, und c, oder 2, 3, und 4. Wenn man aber das Exempel noch genauer betrachtet, so wird man folgende Regeln daraus herleiten können.

Folgen aus den gemachten Gleichungen in Rucksicht auf die Wurzeln.

I. Eine jede Gleichung hat so viel Wurzeln, als der Exponent der ersten Dignität Einheiten in sich begreifft; nemlich x^3 hat 3 Wurzeln, x^4 würde 4 haben, und x^n würde n Wurzeln haben.

I. Wie viel eine gegebene Potenz jedesmal Wurzeln habe.

II. Die bekannte Grösse des zweyten Gliedes ist die Summe aller Wurzeln, (a+

II. Aus was man die Wurzeln selbst fin-

den und nach und nach bestimmen könne,

(a+b+c) die bekannte Grösse des dritten Glieds ist die Summe der Producte aus je zwo und zwo Wurzeln; u. s. w. das letzte Glied ist endlich das Product aller Wurzeln. (abc) oder in Zahlen 24 = 2 . 3 . 4.

III. Woran man erkenne, wie viel wahre und falsche Wurzeln eine Grösse haben.

III. Es sind so viel wahre oder positive Wurzeln vorhanden, als unmittelbare Abwechslungen der Zeichen + und — vorkommen, z. E. im gegenwärtigen Exempel wechseln die Zeichen gerade ab; folglich sind es lauter wahre oder positive Wurzeln. Diese letzte Regel hat Harriot gefunden und ohnelängst der berühmte Herr von Segner demonstrirt Die beede erstere fliessen aus der Natur der vorgegebenen Gleichung, und haben keine weitere Demonstration nöthig.

Beantwortung der Frage, wie es zugehe, daß eine einige Grösse so vielerley Wurzeln haben könne,

§. 119. Vielleicht giebt es Leser, welchen es ungewöhnlich vorkommt, daß eine einzige Dignität, z. E. die zehende Dignität von zwey, so viele, nemlich in diesem Fall, zehen Wurzeln haben solle? In dem Wurzeltäfelein gehen die Dignitäten in der Ordnung fort; und wir haben bisher geglaubt, 2 sey die einige Cubicwurzel von 8, 3 von 27, 4 von 64 u. s. w. Wie ist es dann möglich, daß diese Zahlen noch mehrere Wurzeln haben, und wenn dieses sich so verhält, wie viele Mühe braucht man, die mancherley Wurzeln der höhern Dignitäten zu finden? Auf die

erste Frage wollen wir zuerst durch ein augenscheinliches und leichtes Exempel antworten, damit auch die Einbildungskraft von der Möglichkeit dieser Sache deutlich überzeugt werde. Wir sagen: die Cubiczahl 8 oder 2^3 hat wirklich drey Wurzeln, nemlich die positive Wurzel 2, und noch zwo andere eingebildete, welche $-1+\sqrt{-3}$ und $-1-\sqrt{-3}$ sind. Was die positive Wurzel anbelangt, so hat die Sache keine Schwürigkeit, dann $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Daß hingegen der Cubus der beeden eingebildeten Wurzeln $(-1+\sqrt{-3})^3$ und $(-1-\sqrt{-3})^3$ auch vollkommen achte ausmachen, das müssen wir jetzo beweisen. Die Sache ist leicht, wenn man nur gut multipliciren kann. Denn

und wie z. E. 8 oder die Cubiczahl von 2 wirklich drey verschiedene Wurzeln habe, durch deren dreymalige Multiplication der Cubus 8 entstehe.

Die ganze Sache wird durch ein augenscheinliches Exempel auch der Einbildungskraft begreifflich und faßlich gemacht.

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3} \\ \quad -\sqrt{-3}+1.-3 \\ \hline \end{array}$$

gibt das Quadrat $+1-2\sqrt{-3}-3 = -2-2\sqrt{-3}$

dieses Quadrat wird nochmalen multiplicirt durch die Wurzel $= -1+\sqrt{-3}$

$$\begin{array}{l} -2-2\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +2+2\sqrt{-3} \\ -2\sqrt{-3}-2.-3 \\ \hline \end{array}$$

so bekommt man die Cubiczahl $= +2-2.-3$

Da nun $-2 \cdot -3 = 6$ so ist die ganze Cubiczahl $2 + 6 = 8$; folglich ist die angeführte Wurzel $-1 + \sqrt{-3}$ auch eine Cubicwurzel von 8. Eben so ist auch eine Wurzel davon $-1 + \sqrt{-3}$. wie man die Probe leicht durch eine ähnliche Rechnung machen kann. Nun wird man fragen, wie finden wir dann solche Wurzeln? Auch das wollen wir an dem nemlichen Exempel zeigen. Die positive und wahre Cubicwurzel von 8 ist bekannter massen 2. Nun wollen wir diese Wurzel x nennen, so ist $x = 2$ und $x^3 = 8$ folglich $x^3 - 8 = 0$. Diese auf Nulle reducirte Gleichung der Potenz wollen wir durch ihre gleichfalls auf Null reducirte Wurzel $x - 2 = 0$ dividiren; da dann herauskommt:

$$\begin{array}{l} \quad x^3 - 8 \,\big\}\, x^2 + 2x + 4 = 0. \\ (x-2) \\ \qquad \underline{x^3 - 2x^2} \\ \qquad\qquad + 2x^2 - 8 \\ (x-2) \\ \qquad\qquad \underline{2x^2 - 4x} \\ \qquad\qquad\qquad + 4x - 8 \\ (x-2) \\ \qquad\qquad\qquad \underline{4x - 8} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Der Quotient ist also $x^2 + 2x + 4$, welcher nothwendig $= 0$, weil die zu divi-

vid-

vidirende Zahl so wohl als der Divisor = 0 waren. Nun wollen wir beederseits 3 subtrahiren, so ist, weil

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$3 = 3$$
$$x^2 + 2x + 1 = -3$$

und wenn man beederseits die Quadratwurzel ausziehet,

$$x + 1 = \pm \sqrt{-3} \text{ folglich}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{-3}$$

welches die beede eingebildete Wurzeln sind. Der Grund, warum wir die Quadratwurzel von -3 gesetzt haben $+\sqrt{-3}$ und $-\sqrt{-3}$ oder $\pm\sqrt{-3}$ wird unsern Lesern aus §. 117. noch erinnerlich seyn: weil nemlich eine jede Quadratwurzel das Zeichen + und − haben, und a^2 nicht nur $+a \cdot +a$ sondern auch $-a \cdot -a$ seyn kann.

Folgen aus dem bisherigen, und Vorbereitungen zur zweyten Antwort, wie man nemlich die verschiedene Wurzeln wirklich finden solle.

§. 120. Nunmehro glauben wir, unsere Leser wundern sich nicht mehr darüber, wenn sie hören, daß die Potenzen mehrere und verschiedene Wurzeln haben können. Wir eilen dahero auch zur zweyten Antwort, und zeigen, wie man die verschiedene Wurzeln finden solle. Dieses ist nun freylich ein beschwerlichs Geschäffte; denn es ist nicht nur die Frage, wie man die Wurzeln überhaupt, sondern wie man besonders die positive

und wahre Wurzeln herausbringen könne. Wahre und positive Wurzeln sind nemlich alle, welche das Zeichen plus haben: falsche hingegen heissen diejenige, welche negativ sind, oder das Zeichen minus vor sich haben; man kann auch die eingebildete Wurzeln einigermassen hieher rechnen. Weit schicklicher wäre es, wenn man die erstere nur positive, die letztere aber negative, und nicht falsche Wurzeln hiesse.

Unterschied der wahren und falschen Wurzeln.

Von den eingebildeten Wurzeln merkt man dieses insbesondere noch an, daß, wo sie vorhanden, selbige nie allein, sondern noch einen oder mehrere Gefährten haben, doch so, daß ihre Anzahl niemalen ungleich, sondern immer gleich und gerade ist. Es sind also entweder zwo, oder vier, oder sechs, niemalen aber nur eine, oder drey, oder fünf u. s. w. in einer Potenz befindlich. Wenn demnach in einer Potenz drey eingebildete Wurzeln gefunden worden sind, so wird gewiß die vierte auch noch darinnen stekken.

Eingebildete Wurzeln sind, wo sie sich finden, allemal paarweiß vorhanden.

In dem §. 118. gegebenen Fundamentalexempel kommen lauter wahre und positive Wurzeln vor; wir wollen dahero auch eines von negativen geben, ehe wir die Art und Weise, die Wurzeln wirklich zu suchen, vollends erklären.

Ein Exempel von lauter wahren und positiven Wurzeln.

Es seye $x = 2$ so ist $x - 2 = 0$. Ferner seye $x = -3$ so ist $x + 3 = 0$. Folglich $(x-2).(x+3) = x^2 + x - 6 = 0$.

Ein Exempel, wo auch negative Wurzeln vorkommen.

Weil

Weil zwey Zeichen plus auf einander folgen, so siehet man schon, daß nach §. 118. nr. III. eine negative Wurzel da seye; es ist aber auch eine positive vorhanden, weil plus und minus einmal unmittelbar auf einander folgen. Die Probe dieser Regel erhellet aus der vorgenommenen Operation selbst: dann die eine Wurzel war ja $- 3$ und die andere $+ 2$. Ferner hat die erste Grösse den Exponenten zwey; folglich enthält die Gleichung zwo Wurzeln, wie abermal aus der Operation selbst ersichtlich ist. Die bekannte Grösse des zweyten Gliedes ist 1, dann $x = 1\,x$; folglich ist 1, die Summe aller Wurzeln, indeme $- 3 + 2 = - 1$. nur daß sie das entgegengesetzte Zeichen hat. Endlich das letzte Glied ist das Product der Wurzeln; dann $- 3 \cdot 2 = - 6$. Wann ich also für x in der Gleichung $- 3$ setze, so habe ich $x^2 + x - 6 = - 3 \cdot - 3 + 1 \cdot - 3 - 6$ $= 9 - 3 - 6 = 0$. Auf gleiche Weise werden Gleichungen von höhern Potenzen gefunden; und der Unterschied bestehet blos darinnen, daß die Rechnung mühsamer und weitläuftiger wird.

§. 121. Nunmehro können wir zeigen, wie man die wahre Wurzeln findet. Wir haben gehört, daß das letzte Glied das Product aller Wurzeln seye, dahero man am sichersten gehet, wenn man das letzte Glied in alle seine Factores vertheilet,

Wie man die wahre Wurzeln finde;

Allgemeine Antwort.

und mit einem jeden einen Versuch wagt, ob er für x gesetzt werden könne, und durch diese Substitution die neue Aequation Null werde. Ist dieses, so ist die angenommene Wurzel eine wahre Wurzel. Z. E. in dem obigen Exempel $x^2 + x - 6$ ist das letzte Glied $6 = 2 \cdot 3$; wir wollen also einen Factor, nemlich 2 für das x setzen, so werden wir haben $4 + 2 - 6 = 0$; folglich ist 2 eine wahre Wurzel. Weil es aber geschehen kann, daß nicht nur einige Glieder in einer solchen Gleichung fehlen, sondern daß auch selbst das letzte Glied gar zu groß ist, und allzu viele Factores hat, folglich die Arbeit durch das oftmalige Versuchen zu mühsam und langsam würde; so hat man auf Mittel gesonnen, eines theils eine Gleichung kleiner zu machen, andern theils die nähere Grenzen zu finden, zwischen welche die wahre Wurzeln hineinfallen. Denn wenn das letzte Glied klein ist, so hat es weniger Factores; je weniger Factores aber darinnen stecken, desto eher und gewisser kann ich die Wurzeln verrathen. §. 118. nr. II. Ferner wenn ich die Grenzen der Wurzel weiß, z. E. daß sie zwischen 5 und 12 hineinfalle, oder grösser als 5, und kleiner als 12 seye, so werde ich die wahre Wurzel auch leichter finden, als wenn mir diese Grenzen unbekannt wären. Wie man nun diese beede Mittel finden und anwenden

Warum man noch besondere Antworten und Auflösungen nöthig habe, und was für Fälle vorkommen, welche man besonders zu merken habe.

den solle, müssen wir jetzo noch erklären.

§. 122. Wir zeigen zuerst, wie man eine Gleichung, folglich auch ihr letztes Glied, kleiner machen könne; wiewohlen es nöthig ist, daß es, wenn Brüche vorkommen, auch zuweilen grösser werde; sodann wie man die fehlende Glieder ergänzen solle. Diß können wir am besten thun, wenn wir die Art und Weise, wie die vier Rechnungsarten oder Species auf die Gleichungen von dieser Art angewendet werden, vorläuffig erklären. Man kann hier nemlich wiederum addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, und das alles auf eine gar leichte und bequeme Weise. Z. E. man solle in der Gleichung

Wie man eine gegebene Gleichung verändern könne, und wie dieses durch Anwendung der vier Rechnungsarten geschehe;

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

die Wurzel x um 3 vermehren, oder zu x noch drey addiren, so sage ich, die um 3 vermehrte Wurzel oder $x + 3$ solle y heissen, das ist:

durch die Addition

$$x + 3 = y \text{ folglich}$$
$$x = y - 3$$

$$x^2 = (y-3).(y-3) = y^2 - 6y + 9$$
$$-5x = \quad -5y + 15$$
$$+6 = \quad +4$$

eine neue Gleichung $y^2 - 11y + 28 = 0$ in welcher $y = x + 3$. Eben so kann ich subtrahiren, z. E. 2, wenn ich setze

und durch die Subtraction.

$x - 2 = y$. Da dann $x = y + 2$ und die ganze Ope-

Operation, wie die obige vorgenommen wird. Nemlich ich muß das Quadrat von x in dem gleichen Werth von $y+2$ suchen, da ich dann y^2+4y+4 bekomme; hernach muß ich $-5x$ in dem gefundenen Werth von x, ausdrucken, da ich dann $-5(y+2)=-5y-10$ bekomme; das letzte Glied 4 muß ebenfalls noch addirt werden, wenn die Gleichung null werden solle. Das giebt nun den Ausdruck $y^2-y-2=0$; in welchem $y=x-2$. u. s. w.

Wie man die Multiplication bey solchen Wurzeln anbringe.

§. 123. Man kann die Wurzeln solcher Gleichungen auch multipliciren. Dann man solle in der Gleichung

$$x^3+bx^2+cx+q=0$$

die Wurzel x mit a multipliciren; so setzet man $ax=y$ folglich

$$x=\frac{y}{a}; \text{ demnach ist:}$$

$$x^3=\frac{y^3}{a^3}$$

$$bx^2=\frac{by^2}{a^2}$$

$$cx=\frac{cy}{a}$$

$$q=q$$

Also $$\frac{y^3}{a^3}+\frac{by^2}{a^2}+\frac{cy}{a}+q=0.$$

$$\overline{}\ a^3$$

$$y^3+aby^2+a^2cy+a^3q=0.$$

wenn

wenn ich nemlich beederseits mit a^3 multiplicire. In dieser Gleichung ist $y=x.a$. Man darf also in diesem Fall eine gegebene Gleichung nur durch eine geometrische Progression multipliciren, deren erstes Glied eins, das zweyte aber, oder der Exponent diejenige Zahl ist, durch welche die Gleichung multiplicirt werden solle. Dann die obige Gleichung wird eben so gut erhalten, wenn man ein jedes Glied in die darunter geschriebene Progression multiplicirt; z. E.

und was für eine allgemeine und leichte Regel, solche Gleichungen zu multipliciren, aus der Operation hergeleitet werde.

$$\begin{array}{cccc} y^3 & +by^2 & +cy & +q \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ \hline \end{array}$$
$$y^3+aby^2+a^2cy+a^3q=0.$$

Man muß aber in diesem Fall die fehlende Glieder nicht vergessen: denn es kann geschehen, daß das zweyte Glied u. s. w. wenn z. E. $+2x^2$ und $-2x^2$, welche einander aufheben, in einer Gleichung vorkämen, ganz wegfiele; dahero man seine Stelle mit einem * bezeichnet, und das correspondirende Glied der geometrischen Proportion darunter setzt. Z. E.

Wie man die in der Gleichung je und je fehlende Glieder dißfalls zu behandeln suche, und warum oft Glieder fehlen.

$x^{3*}+cx-q$ multiplicirt mit 2 ist

$$\begin{array}{cccc} x^3 & * & +cx & -q \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline \end{array}$$
$$x^3+4cx-8q.$$

Von der Division der Gleichungen.

Bey der Division ist die Operation eben so leicht. Man solle in

$$x^3 + bx^2 - cx + r = 0$$

die Wurzel x dividiren durch a, so setzt man $\frac{x}{a} = y$ folglich

$$x = ay. \text{ Daher}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= a^3 y^3 \\ + bx^2 &= ba^2 y^2 \\ - cx &= - cay \\ + r &= + r \end{aligned}$$

$$a^3y^3 + ba^2y^2 - cay + r = 0.$$

Wenn man nun beederseits mit a^3 dividirt, so hat man

$$y^3 + \frac{by^2}{a} - \frac{cy}{a^2} + \frac{r}{a^3} = 0$$

eine neue Gleichung, in welcher $y = \frac{x}{a}$;

nebst einer kurzen Divisionsregel.

Man siehet aber zugleich, daß sie erhalten werde, wenn man die erste Gleichung durch eine geometrische Progression dividirt, deren erstes Glied eins, und das zweyte die Zahl ist, durch welche dividirt werden solle; denn die Divisores 1, a, a^2, a^3 gehen in geometrischer Progression fort. Man muß aber auch hier die Anmerkung beobachten, die wir in Absicht auf die fehlende Glieder bey der Multiplication gegeben haben.

So

So wird z. E. x durch 3 dividirt in der Gleichung

$$\begin{array}{l} x^3 * + px - r \\ \underline{1 \quad 3 \quad 9 \quad 27} \\ x^3 + \frac{px}{9} - \frac{r}{27} \end{array}$$

Diß ist die ganze Lehre von der Anwendung der vier Rechnungsarten auf diese höhere Gleichungen. Nunmehro werden wir mit leichter Mühe zeigen können, wie man die zerschiedene Wurzeln finden solle.

§. 124. Die Fälle, die einem die Operation schwer machen, haben wir angezeigt. Z. E. wenn ein Glied fehlt; so vermehrt man die Wurzel mit eins u. s. w. §. 122. wenn ein oder mehr Brüche vorkommen, so multiplicirt man mit dem Nenner des Bruchs, oder dem Producte aller Nenner der vorkommenden Brüche; kommen Irrationalgrössen vor, so sucht man sie bald durch die Multiplication bald durch die Division hinweg zu schaffen; will man ein Glied aus der Gleichung, z. E. das zweyte hinweg bringen, so versucht man es theils durch die Addition, theils durch die Subtraction, je nachdeme das wegzuschaffende Glied das Zeichen plus oder minus hat. In jenem Fall wird die Wurzel um die durch den Exponenten des ersten Glieds dividirte bekannte Grösse des zweyten Glieds vermehrt, in die-

Allgemeine Regeln, die Gleichungen zu ändern, wenn ein Glied fehlt,

wenn die Gleichung Brüche hat,

wenn Irrationalgrössen darinen stecken,

wenn man ein Glied wegschaffen will u. s. w.

sem aber vermindert. Will man das letzte Glied kleiner haben, so versucht man es bald durch die Addition bald durch die Subtraction; u. s. w. Was aber die Grenzen einer Gleichung betrifft, so müssen wir davon noch eine besondere Rechnung hersetzen, welche in dieser Materie die letzte seyn solle.

Wie man die Schranken finde, zwischen welche die wahre Wurzeln hinein fallen.

§. 125. Weil das letzte Glied das Product aller Wurzeln ist, so kann einem dieses die Schranken bestimmen helfen. Es seyen die Würzeln 3 und 5, so wird $(x-3).(x-5) = x^2 - 8x + 15$. Hier kommt der in der Einleitung vorgetragene Satz das erstemal vor, nemlich: was grösser ist, als eine von zwo gleichen Grössen, das ist auch grösser als die andere u. s. w.

Nun ist $x^2 - 8x + 15 = 0$.
Folglich $x^2 + 15 = 8x$
Dahero $x^2 < 8x$
$: x$
$x < 8$

Ferner weil $x^2 + 15 = 8x$
so ist $15 < 8x$
$: 8$
$\frac{15}{8} < x$.

Also sind 8 und $\frac{15}{8}$ die Schranken von x, das ist, die Wurzeln sind kleiner als 8 und grösser als $\frac{15}{8}$. Es ist auch wirklich so; dann

dann sie sind 5 und 3. Wenn man es nun allgemein machen will, so kann man

$x^2 - qx + r = 0$ setzen. Folglich

$x^2 + r = qx$

$r < qx$

$\frac{r}{q} < x$

Ferner weil $qx = x^2 + r$

so ist $qx < x^2$ $:x$

und $q < x$.

Also sind q und $\frac{r}{q}$ die Schranken bey quadratischen Gleichungen. Bey Cubischen kann man sie eben so finden. Z. E. wenn das zweyte Glied fehlt, so setzet man

$x^3 - qx + r = 0$. Folglich

$x^3 + r = qx$

$x^3 < qx$ $:x$

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$.

Ferner, weil

$x^3 + r = qx$ so ist

$r < qx$ und

$\frac{r}{q} < x$.

Folglich sind $\frac{r}{q}$ und $\sqrt{q}$ in diesem Falle die Schranken. u. s. w. Wenn man nun

die

die Schranken einmal gefunden hat, so werden die wahre Wurzeln sich näher finden lassen. Da man die Sache dann nach denjenigen Regeln, die wir §. 124. vorgetragen, versuchet, und je nachdeme einem die natürliche Gaben und die Uebung das Geschicke dazu geben, durch witzige und scharfsinnige Vergleichungen, Substitutionen, Theilungen u.s.w. das Problem aufzulösen bemühet ist; wie wir jetzo bey den algebraischen Aufgaben zeigen wollen, wenn wir vorhero noch was weniges von den unreinen quadratischen Gleichungen gesagt haben werden.

Was man weiter bey Anwendung der gegebenen Regeln zu beobachten habe.

§. 126. Wenn das letzte Glied in einer Quadratzahl fehlet, und doch die Zahl einer gegebenen Grösse gleich gesetzt wird, z. E. $x^2 \mp mx = n^2$, so heißt man diesen Ausdruck eine unreine quadratische Gleichung. Es ist ungemein viel daran gelegen, daß man diese Gleichung zu ergänzen wisse: denn sie kommt nicht nur öfters vor, sondern sie trägt auch zu den Auflösungen der schönsten und wichtigen Aufgaben sehr vieles bey. Wir wollen die Auflösung auf zween Fälle anwenden. Der erste ist, wenn $x^2 + ax = b^2$; nun fragt sichs, wie man die Gleichung ergänze, damit man die Wurzel ausziehen, und das x in bekannten Grössen hernach finden könne. Wir wissen, daß allemal gleiches herauskommt, wenn man glei-

Von unreinen quadratischen Gleichungen, ihr allgemeiner Ausdruck, wie nöthig es seye, daß man eine solche Gleichung zu ergänzen wisse. Wie viele Fälle vorkommen;

ches zu gleichem addirt. §. 9. Es ist also nur die Frage, was man beederseits addiren solle? Wenn wir wüßten, wie das dritte Glied in der quadratischen Gleichung heissen müsse, so wäre es am natürlichsten, wenn wir dieses addiren. Wir wollen sehen, ob wir nicht einen Ausdruck finden können, der dem gesuchten dritten Glied gleich ist. Ein ganzes Quadrat ist $a^2 + 2ab + b^2$, das dritte Glied ist also das Quadrat von demjenigen halben Factor des zweyten Gliedes, der noch nicht im ersten Glied vorkame. Da nun die Factores des zweyten Gliedes $2ab$ sind a und $2b$; dann $a \cdot 2b = 2ab$; und aber a schon im ersten Glied vorgekommen: so richte ich mein Augenmerk blos auf den zweyten Factor $2b$; diesen halbire ich, so habe ich b, sein Quadrat ist b^2. Eben so mache ich es mit der obigen Gleichung:

Auflösung des ersten Falls, samt dem Beweis.

sie heißt $x^2 + mx = n^2$

Das zweyte Glied heißt mx, der Factor, auf den ich mein Augenmerk richte, heißt m, weil x im ersten Glied vorkam; ich halbire also m, und bekomme $\frac{1}{2}m$, diesen halben Factor quadrire ich, da er dann $\frac{1}{4}m^2$ heißt, und folglich das dritte Glied des unvollkommenen Quadrats seyn wird. Wenn ich nun beederseits dieses Quadrat $\frac{1}{4}m^2$ addire, so finde ich

x^2

$$x^2 + mx = n^2$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2$$
$$x^2 + mx + \tfrac{1}{4}m^2 = n^2 + \tfrac{1}{4}m^2$$

Ziehe ich nun beederseits die Quadrat-Wurzeln aus, so ist

$$x + \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(n^2 + \tfrac{1}{4}m^2)}$$
und $x = \sqrt{(n^2 + \tfrac{1}{4}m^2)} - \tfrac{1}{2}m$

Auflösung und Beweis des andern Falls.

Der andere Fall ist,

$x^2 - mx = n^2$, da ich dann wieder addire $+ \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2$

$$x^2 - mx + \tfrac{1}{4}m^2 = n^2 + \tfrac{1}{4}m^2$$
$$x - \tfrac{1}{4}m = \sqrt{(n^2 + \tfrac{1}{4}m^2)}$$
$$x = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{(n^2 + \tfrac{1}{4}m^2)}$$

Dieser letztere Fall ist wie der erste beschaffen; ausgenommen, daß das zweyte Glied der Wurzel negativ wird; dann z. E. $(a-b).(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$, wie die allgemeine Multiplicationsregeln mich lehren Folglich darf ich in diesem Fall $\tfrac{1}{4}m^2$ wiederum als eine positive Grösse addiren; in der Wurzel aber wird allemal das zweyte Glied negativ seyn. Das ist die Auflösung und der Beweis von dieser überaus wichtigen Lehre, die unreine quadratische Gleichungen, wie sie Herr Baron von Wolf nannte, oder (æquationes quadraticas affectas) zu behandeln. Wir können dahero nicht umhin, unsern Lesern diese Regel noch einmal anzupreisen, nach welcher man ein sol-

solches Quadrat ergänzet, wenn man das Quadrat des halbirten und im ersten Glied nicht vorgekommenen Factors vom zweyten Glied, zu ihm addiret. Wenn also der Ausdruck $x^2 + \frac{1}{2}x$ hiesse, so wird die Ergänzung $\frac{1}{16}$ heissen; wäre $x^2 + \frac{a}{3}x$ zu ergänzen, so muß das dritte Glied $\frac{a^2}{6 \cdot 6} = \frac{a^2}{36}$ heissen. Alle diese Fälle sind unter der Regel begriffen, weil man allemal den Coefficienten von x halbirt, und hernach quadrirt. Die Hälfte von $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{4}$, und das Quadrat davon $\frac{1}{16}$; die Hälfte von $\frac{a}{3}$ ist $\frac{a}{3 \cdot 2} = \frac{a}{6}$ und das Quadrat davon $\frac{a^2}{36}$ u. s. w. Doch diese Ausdrücke werden unsere Leser nunmehro verstehen; wir wollen dahero zum Beschluß eilen.

Wiederholung der Regel, und Anwendung auf einige besondere Fälle in Zahlen und Buchstaben.

§. 127. Wir haben versprochen, am Ende der Arithmetik noch einige algebraische Aufgaben vorzulegen. Es giebt bestimmte und unbestimmte Aufgaben. Die letztere kommen mir vor, wie diejenige Fragen, darauf man einem vielerley Antworten geben kann; da hingegen die bestimmte Aufgaben solchen Fragen gleich sind, auf welche nicht mehr als eine einige Antwort möglich ist. Z. E. wenn man fragt, ob man einem nicht zwo Zahlen sagen könne, deren Summe 30 seye; so kann man eine Menge Antworten darauf

Von algebraischen Aufgaben.

Unterscheid der bestimmten und unbestimmten Aufgaben.

aufgeben. Denn 10 + 20, 15 + 15, 16 + 14, 29 + 1 u. s. w. sind lauter solche Zahlen, durch welche die Frage aufgelößt wird. Frage ich aber, wie die zwo Zahlen heissen, deren Summe drey und deren Differenz eins ist: so giebt es nur eine Antwort; nemlich die Zahlen sind 2 und 1. Weil aber doch solche bestimmte Fragen auch in der Buchstabenrechnung auf eine allgemeine Art aufgelößt werden: so kann man die erste Auflösung für individuell ansehen, die zweyte hingegen für eine solche, die eine ganze Gattung von Individuellfragen, welche alle zu einer Classe gehören, auflößt. Nur hat man bey allen diesen Aufgaben vorzüglich auf die Möglichkeit zu sehen. Denn wie das geometrische Problem, man solle aus zwo geraden Linien ein Zweyeck machen, in der Geometrie unmöglich ist; so giebt es auch in der Arithmetik dergleichen unmögliche Aufgaben und Fragen, welche entweder die Schwäche dessen, der sie aufgiebt, oder dessen, der sie auflösen will, verrathen. So ist es unmöglich, zwo ganze und positive Zahlen zu finden, deren Summe 1, und deren Differenz 2. u. s. w. Man muß also zu den arithmetischen oder algebraischen Aufgaben, (denn es ist gleichviel, ob ich ihnen einen griechischen oder arabischen Namen gebe,) einen scharfsinnigen Witz und eine gute

Bestimmte Aufgaben sind wiederum entweder individuell oder allgemein.

Warum man besonders darauf zu sehen habe, ob die Aufgabe auch möglich seye,

gute Beurtheilungskraft vorläuffig mitbringen, wenn man einen guten Fortgang sich versprechen will. Hieraus wird sich hernach die Fähigkeit von selbst geben, eine Aufgabe, und besonders den Anfang der Rechnung, deutlich, kurz, und auf eine solche Weise zu setzen, daß man den Witz des Rechners sogleich aus den zwo bis drey ersten Linien ersehen kann.

und wie sich die Scharfsinnigkeit des Witzes bey mathematischen Aufgaben besonders äussere.

§. 128. Um nun eine kurze Anleitung zu dieser schönen Arbeit zu geben, wollen wir unsern Lesern die Art und Weise, ein Problem geschickt und wohl zu setzen, aus den Newtonischen Schriften anführen. Die Aufgaben lassen sich durchgehends mit Worten und mit Zeichen ausdrucken. Wir wollen beede Ausdrücke in Zeichen und Worten nebeneinander setzen: denn die Hauptkunst eines algebraischen Geistes bestehet darinnen, daß er alle Bedingungen einer Aufgabe in wirklichen Gleichungen schicklich ausdrucke. Z. E. Newton giebt folgendes Exempel:

Wie man ein Problem schicklich in Worten und Zeichen ausdrucke, und wie alles hiebey auf die Kunst ankomme, die Frage genau zu bestimmen und die erste Linien richtig zu setzen.

Ein Kaufmann vermehret sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber alle Jahre zur Erhaltung seiner Familie 100 ℔. Sterling davon weg, und wird nach drey Jahren nochmalen so reich, als er anfänglich war: wie viel hat er also im Vermögen?

Exempel, wie ein Problem gesetzet werde, wenn in

dividuelle Umstände dabey vorkommen.

I. Der Ausdruck in Worten.	II. in Zeichen;
1) Ein Kaufmann besitzt ein gewisses Vermögen,	x
2) wovon er das erste Jahr 100 Pf. Sterling braucht.	$x - 100$
3) den Rest vermehrt er um ein Drittheil.	$x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$
4) das zweyte Jahr braucht er wieder 100 Pf. davon.	$\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
5) den Rest vermehrt er um ein Drittheil.	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$
6) im dritten Jahr braucht er abermal 100 Pf.	$\frac{16x-2800}{9} - 100 = \frac{16x-3700}{9}$
7) Er vermehrt den Rest nochmalen um ein Drittheil,	$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$
8) und ist noch einmal so reich als er im Anfang war.	$\frac{64x-14800}{27} = 2x$

Jetzo ist das Problem gesetzt, und es ist weiter nichts übrig, als daß man calculirt, und x findet. Wenn man in der Gleichung beederseits mit 27 multiplicirt, so ist

64x

$$64x - 14800 = 54x,$$

folglich $10x - 14800 = 0$

$$10x = 14800$$

$$: 10$$

$$x = 1480.$$

In diesem Exempel siehet man wohl, daß der Begriff des Kaufmanns u. s. w. nicht zur Rechnung gehört; man könnte es also noch allgemeiner machen, wenn man den jährlichen Aufwand a, und die jährliche Vermehrung $\frac{1}{P}$ oder P nennen würde u. s. w. Dieses und einige folgende Exempel stehen in Newtons Arithmetica universali.

§. 129. Nunmehro wollen wir nach der Ordnung, von allerley Gattungen, Exempel und Aufgaben hersetzen. Das leichteste ist: wenn man zwo Zahlen x und y finden solle, deren Summe a und deren Differenz b ist. Wir haben es in der Einleitung vorgetragen, jetzo aber wollen wir es kürzer auflösen. Nach der Bedingung des Problems ist $x + y = a$, und $x - y = b$; nun will ich diese beede Grössen zuerst addiren, und hernach von einander subtrahiren, und sehen, was heraus kommt:

Von allerhand bestimmten Aufgaben, ohne individuelle Umstände;

Wie man zwo Grössen finden solle, deren Summe und Differenz gegeben ist.

$$x+y=a$$
$$x-y=b.$$
$$2x=a+b. \text{ Folglich}$$
$$: 2$$
$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$$

Die grössere Zahl x ist daher allemal der zur halben Summe addirten halben Differenz gleich; oder die grössere Zahl wird gefunden, wenn ich zur gegebenen Summe die gegebene Differenz addire, und alles zusammen hernach halbire, oder durch 2 dividire. Ferner, wenn man subtrahirt

$$x+y=a$$
$$x-y=b.$$
$$2y=a-b$$
$$: 2$$
$$y=\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b.$$

Warum man diese Aufgabe behalten solle, und wo man sie wieder brauche.

Die kleinere Zahl ist also die halbe Summe weniger die halbe Differenz. Dieses ist die allgemeine Auflösung für alle Zahlen dieser Art. Man muß sie um so eher behalten, weil man sie in der Trigonometrie wieder gebraucht.

Wie man aus dem gegebenen Product

§. 130. Will man aus dem gegebenen Product und der Summe der Zahlen, die Zahlen selbst finden; so kann man die Aufgabe entweder auf das obige Problem redu-

reduciren, oder durch eine zu ergänzende quadratische Gleichung auflösen: denn wenn die Summe a und das Product b ist, so darf ich die halbe Differenz nur x nennen; da ich dann bekomme die grössere Zahl $\frac{1}{2}+x$, und die kleinere $\frac{1}{2}a-x$, und ihr Product $\frac{1}{4}a^2 - x^2 = b$. Folglich $\frac{1}{4}a^2 - b = x^2$ und $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$. Nenne ich aber die gesuchte Zahlen x und y, so ist $x+y=a$, und $xy=b$. Da giebt es dann eine quadratische Gleichung;

und der Summe zweyer Grössen die Grössen selbst finden könne.

weil $x = a - y$ und $x = \frac{b}{y}$ folglich

$$a - y = \frac{b}{y} \text{ und } ay - y^2 = b \text{ oder}$$

$$y^2 - ay = -b. \text{ Dahero}$$

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$$

$$y = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}.$$

Da nun $x = a - y$, so läßt sich auch x leicht finden, wenn man den gefundenen Werth des y von a subtrahirt. Anfänger haben ein grösseres Vergnügen, wenn man die Exempel mit individuellen Umständen verschönert; man kann daher einen zugleich auf die Probe setzen, ob er das wesentliche vom ausserwesentlichen nicht nur unterscheide, sondern auch das Problem selbst recht fasse. Wir wollen dahero einige hieher schreiben, welche theils Marquis d'Hospital, theils Newton gegeben haben.

Wie man die Exempel mit individuellen Umständen vortrage, und warum es für Anfänger nützlicher und besser seye.

Der erstere sagt: ein Frauenzimmer wurde gefragt, wie alt sie seye. Sie antwortete: ihre Mutter habe sie gerade im vierzigsten Jahr ihres Alters gebohren, wenn man nun ihrer Mutter gegenwärtiges Alter mit ihrem (der Tochter) eigenen Alter multiplicire; so komme das Alter Methusalems heraus, des ältesten unter den Menschen, welcher 969 Jahre gelebet habe. Aus dieser Berechnung werde man ihr Alter finden. Wir nennen das Alter der Tochter x Jahre. Die Mutter muß also damals, da die Tochter um ihr Alter gefragt wurde, 40 + x Jahre alt gewesen seyn. Denn 40 Jahre war sie alt, da sie die Tochter gebahr; zu diesem Alter kommt nun noch das Alter der Tochter, da dann die Summe das Alter der Mutter in der gegebenen Zeit ausmacht. Dieses Alter solle mit dem Alter der Tochter multiplicirt werden, das Product ist 969. Nun ist die erste Gleichung gesetzt.

Eine individuelle Aufgabe, bey welcher eine unreine quadratische Gleichung vorkommt.

$(40 + x)\,x = 969$. Das ist, wenn man wirklich multiplicirt:

$40x + x^2 = 969$. Eine unreine quadratische Gleichung:

$$x^2 + 40x = 969$$
$$400 = 400.$$
$$x^2 + 40x + 400 = 969 + 400 = 1369.$$
$$x + 20 = \sqrt{1369} = 37.$$
$$x = 37 - 20 = 17.$$

Also war die Tochter 17 Jahre alt. §. 131.

§. 131. Es giebt auch Exempel von Brüchen. Wir wollen sie wieder mit individuellen Umständen begleiten. Pythagoras wurde einmal gefragt: wie viel er Schüler habe? Er antwortete: die Hälfte studire die Philosophie, der dritte Theil die Mathematik, der vierte aber müsse sich noch im Stillschweigen üben; und eben jetzo habe er drey neue Schüler angenommen. Wenn man nun die Anzahl der Schüler x nennet, so wird nach des Pythagoras Antwort seyn:

Eine individuelle Aufgabe, wobey Brüche vorkommen;

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = x + 3$$

das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringt, und addirt,

$$\tfrac{12}{24}x + \tfrac{8x}{24} + \tfrac{6x}{24} = x + 3.$$

Folglich $\frac{26x}{24} = x + 3$

$$\overline{} \cdot 24$$

$$26x = 24x + 72$$

$$24x = 24x$$

$$\overline{} \text{ subtr. } 24x.$$

$$2x = 72$$

$$\overline{} : 2$$

$$x = \tfrac{72}{2} = 36.$$

Also hat Pythagoras 36 Schüler gehabt.

§. 131. Wir wollen auch einige Exempel aus den Newtonischen Schriften geben. Ein Reisender wird von einigen Bettlern um ein Allmosen ersucht; giebt er nun einem jeden 3 kr. so hat er

Einige individuelle Aufgaben aus Newtons Schriften.

8 kr. zu wenig; (dann wir wollen die englischen Münzsorten auf unser deutsches Geld reduciren,) giebt er aber einem jeden 2 kr. so bleiben ihm noch 3 kr. übrig. Man fragt: wie viel er Geld gehabt, und wie viel es Bettler gewesen seyen? Die Anzahl der Bettler solle x seyn; so ist 3x die Anzahl der Bettler dreymal genommen. Eben so viel Kreutzer nemlich 3x kr. mußte der Reisende nun ausgeben, wenn er einem jeden 3 kr. gab; denn er gäbe ja gleichviel aus, wenn dreymal so viel Bettler da wären, und er einem jeglichen einen Kreutzer gäbe: durch diese feine Vergleichung wird nun die Auflösung sehr leicht gemacht. Weil ihm also nach der Bedingung des Problems 8 kr. fehlen, wenn er 3x kr. ausgiebt; so ist sein ganz Vermögen, das er bey sich hat, $= 3x - 8$. giebt er aber einem jeglichen Bettler 2 kr. so giebt er in allem 2x kr. aus, und behält noch 3. Nun ist $3x - 8 - 2x = x - 8$; dieser Rest aber heißt in der Aufgabe 3 kr. folglich ist $x - 8 = 3$. und $x = 3 + 8 = 11$. Also waren es 11 Bettler, und sein Geld bestund in 25 kr.

Ein Exempel, welches mit dem §. 128. gegeben, eine Aehnlichkeit hat, ist folgendes. Eine Athenienserin gieng in den Tempel Jupiters, und bath, er möchte ihr Geld, das sie bey sich hätte, verdoppeln. Jupiter thats, und die Frau opferte

zur

zur Erkänntlichkeit 3 fl.; (denn wir wollen die griechische Münzsorten mit deutschen Namen ausdrucken.) Mit dem Rest gieng sie in den Tempel des Apollo, bath ein gleiches, und opferte zur Danksagung für die Verdopplung ihres Geldes abermal 3 fl. Endlich kam sie in den Tempel der Minerva, und trug ihre erste Bitte auch hier vor; sie wurde noch einmal befriediget, da sie dann ein gleiches Opfer mit 3 fl. in Minervens Tempel zurück ließ. Als sie nach Haus kam, und ihr Geld zehlen wollte, so fand sie mit Verwunderung, daß sie, der Verdopplung ungeachtet, nicht mehr als einen Gulden heimgebracht habe. Nun fragt man: wie viel sie anfänglich Geld gehabt habe? Wir wollen ihr bey sich gehabtes Vermögen x nennen, das wurde erstlich vom Jupiter verdoppelt; folglich war es $2x$, und weil sie davon 3 fl. opferte, so gieng sie mit $2x - 3$ fl. in den Tempel des Apollo. Hie wurde dieser Rest wieder verdoppelt; sie bekam dahero $2(2x - 3)$ oder $4x - 6$, und opferte davon wieder 3 fl.; folglich gieng sie mit $4x - 6 - 3 = 4x - 9$ fl. hinweg. u.s.w.

Also erstlich hatte sie	x
Jupiter duplirt es,	$2x$
Sie opfert 3 fl. und behält also	$2x-3$
Apollo duplirt den Rest,	
dahero hat sie wieder	$4x-6.$

 Sie

Sie opfert 3 fl. bleiben ihr also,	$4x - 9$
Minerva duplirt den Rest; also hat sie	$8x - 18$
Sie opfert wieder 3 fl. folglich bringt sie heim	$8x - 21$

Dieses heimgebrachte ist nun ein Gulden, nachdem sie es zehlte; folglich ist

$$8x - 21 = 1.$$
$$21 = 21 \text{ add.}$$
$$8x = 22.$$
$$: 8$$
$$x = \frac{22}{8} = 2\frac{6}{8} \text{ fl.}$$

Also hatte sie vorhero, ehe sie ihre geitzige Bitte gethan, mehr Geld gehabt, als hernach. Man siehet leicht, daß dieses Exempel allgemein gemacht werden könnte: denn wenn sie a fl. übrig hatte, so ist $x = \frac{a+21}{8}$. Eben so können die Zahlen 21 und 8 gleichfalls allgemeiner gemacht werden. Z. E. wenn sie 3 fl. nach Haus gebracht hätte, so würde x gerade auch 3 fl. gewesen seyn; folglich würde sie weder mehr noch weniger gewonnen haben.

Einige Aufgaben, die Proniczahlen betreffend;

§. 132. Wir haben versprochen, der Proniczahlen noch zu gedenken; in so ferne sie zu Aufgaben dienlich sind. Was eine Proniczahl seye, wissen wir: nemlich die Summe des Quadrats und seiner Wur-

Wurzel ist allemal eine Proniczahl. Nun will man wissen, wie man die Pronicwurzel finde. Es seye

$x^2 + x = a$ quadratische Gleichung.

Folglich

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{a + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{(4a+1)}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(4a+1)}$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(4a+1)} - \frac{1}{2}.$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für alle Pronicwurzeln. Weil nun ferner eine Proniczahl $a^2 + a$, und dieser allgemeine Ausdruck nach §. 60 $= (a+1)a$ oder $a(a+1)$; so siehet man, daß das Product zweyer unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen allemal eine Proniczahl ist. Z. E. $3 . 4 = 12$ eine Proniczahl. Denn $3 . 4 = 3 (3 + 1)$ welcher Ausdruck eine Proniczahl andeutet. Es lassen sich also durch diese Anmerkung Proniczahlen genug mit leichter Mühe erfinden; dann z. E. $4 . 5 = 20$, $5 . 6$, $6 . 7$, $7 . 8$, $10 . 11$, $99 . 100$ u. s. w. sind lauter Proniczahlen.

Wie man mit leichter Mühe eine Menge von Proniczahlen finden könne.

§. 133. Wie man algebraische Aufgaben durch geometrische Progressionen auflöse, habe ich theils §. 128. 131. theils im vierten Capitel zwar nicht ausführlich gezeigt; weil aber doch eine umständliche Anleitung für alle Progressionen daselbst gegeben wurde, so werden unsere Leser von

Von denenjenigen Aufgaben, welche durch Progressionen aufgelößt werden;

selbst

selbst die dahin einschlagende Exempel auflösen können. Was aber die von Zeit und Raum, folglich auch von der Geschwindigkeit abhangende Aufgaben betrifft, so dünkt mich, sie gehören in die Mechanik; wenigstens muß man die Grundbegriffe der mechanischen Wissenschaften inne haben, wenn man die Geschwindigkeiten berechnen, und z. E. aus dem gegebenen Weg, der Zeit, wenn einer ausgeht, und wenn ein anderer ihme nachgeschickt wird, auch der Geschwindigkeit beeder Läuffer den Punkt und die Zeit bestimmen solle, wo der eine den andern einholt, u. s. w. Wir wollen dahero auch diese Aufgaben übergehen. Eben so könnte man die Frage, wo und wie oft der Minutenzeiger den Stundenzeiger in einer Uhr decke, auf gleiche Weise auflösen. Er wird ihn nemlich eilfmal bedecken, das erstemal innerhalb $1\frac{1}{11}$, das zweytemal innerhalb $2\frac{2}{11}$, das drittemal $3\frac{3}{11}$, u. s. w. Das letzte und eilftemal in $11\frac{11}{11}$ Stund, das ist um 12 Uhr: denn von dem Punkt 12 geht die Rechnung an. Die Aufgaben mit Vermischung der Weine gehören auch hieher; dazu braucht man aber nicht weitere Umstände zu wissen. Weil sie nun sehr leicht, und zuweilen durch die Regel Detri aufgelößt werden können; so wollen wir uns nicht damit aufhalten. Wir handeln dahero nur mit

von solchen, bey welchen man die Begriffe von Zeit und Raum nöthig hat.

zwey

zwey Worten noch von unbestimmten Aufgaben.

§. 134. Wenn man auf eine Frage vielerley richtige Antworten geben kann, so ist sie unbestimmt. Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit den unbestimmten Aufgaben. Soll ich zu 2 und 6 die dritte und vierte Proportionalzahl suchen, oder einen Bruch finden, der $\frac{2}{6}$ gleich ist; so werde ich die Menge finden können, welche alle durch $\frac{2m}{6m}$ ausgedruckt werden.

Von unbestimmten Aufgaben.

Denn $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{8}{24}$, u. s. w. sind lauter Brüche, die dem obigen gleich sind. Folglich ist die Aufgabe unbestimmt. Diese unbestimmte Aufgaben können nun auf mancherley Weise vorgetragen werden, je nachdeme man die Frage einrichtet. Z. E. man will zwo Zahlen haben, deren Summe und Product einer gegebenen Zahl a gleich seyen; so wird nach der Bedingung des Problems seyn, wenn die zwo gesuchte Zahlen x und y genannt werden, $xy + x + y = a$, folglich

Einige leichte und auch einige schwere Exempel.

$$xy + x = a - y. \text{ Da nun}$$
$$xy + x = (y + 1)x \text{ nach §. 60. so ist}$$
$$x = (a - y) : y + 1.$$

y mag nun bedeuten, was es will, so wird die Frage aufgelößt seyn. Wenn z. E. $y = 2$, so ist $x = (a - 2) : (2 + 1)$; ist

es

es = 3 so ist $x = (a - 3) : (3 + 1)$ u. s. w. Will man zwo Zahlen x und y finden, welche so beschaffen sind, daß das Quadrat der einen zur andern addirt, das ist $x^2 + y$ ein vollkommenes Quadrat seyen, deren Wurzel $x + y$ seye; so wird

$$x^2 + y = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

folglich $y = 2xy + y^2$ und

$$y - y^2 = 2xy$$

$$: 2y$$

$$(1 - y) : 2 = x.$$

Wie man sich dißfalls üben könne.

Wenn $y = \frac{1}{2}$, so ist $x = 1 - \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$ u. s. w. Man kann also für y einen Bruch setzen, was man für einen will; folglich ist auch dieses Problem unbestimmt. Daß es nun dergleichen unbestimmter Aufgaben eine Menge gebe, wird man leicht begreiffen; wer sich üben will, kann sich also selbst nach Belieben solche aufgeben. Wir wollen dahero unsere Leser auch damit nicht aufhalten; wenn sie nur wissen, was man unter den unbestimmten Aufgaben verstehet. Ich glaube wenigstens, ich habe den Begriff davon hinlänglich erklärt. Denn er wird uns in der Geometrie bey den sogenannten geometrischen Oertern wiederum vorkommen, und zu allerhand schönen Aufgaben Anlaß geben. Da nun in der allgemeinen Arithmetik, welche im Arabischen Algebra heisset, nichts weiter vorkommt,

kommt, das zu wissen nöthig ist; so dürfen wir jetzo diesen ersten Theil aller mathematischen Wissenschaften beschliessen. Unsere Leser werden sich übrigens über seine Grösse nicht beschweren: denn wir haben ihnen nicht eine blose Rechenkunst, sondern die ganze Algebra nach ihren Hauptregeln in die Hände geliefert; dabey aber mit Fleiß den arabischen Namen vermieden, weil es Leute giebt, welche durch die Eitelkeit ihres Wissens auf diesen arabischen Namen so stolz werden, daß sie dem ganzen Geschlechte der übrigen Gelehrten Trotz bieten, wenn sie sich einbilden, sie seyen Algebraisten und Philosophen. Der Name Arithmetik ist dahero viel bescheidener: darum haben wir ihn vorgezogen. Damit man uns aber für keine mathematische Sonderlinge halte, so melden wir diß einige noch, daß selbst der grosse Newton eine vollständige Algebra unter dem Titel Arithmetica universalis geschrieben habe.

Warum dieser erste Theil, als worinnen zugleich die algebraischen Grundsätze ganz vorgetragen wurden, etwas weitläuftig ausgefallen seye;

und warum man nichts destoweniger den algebraischen Namen vermieden, und ihme den Titel der Arithmetik vorgezogen habe.



Innhalt der Geometrie.

§. 135.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft der Grossen, in so ferne sie durch Figuren ausgedruckt werden, folglich eine Länge, Breite und Höhe haben, oder Linien, Flächen, und Cörper sind; dahero handelt man

I. überhaupt von der dreyfachen Ausmessung der Cörper insgemein, und zwar

1) nach dem Längenmaas
2) nach dem Flächenmaas
3) nach dem Cörpermaas;

II. insbesondere von Bestimmung und Ausmessung einiger wichtigen Theile der Grössen, deren Maas noch besondere Regeln erfordert, und zwar

1) in der Trigonometrie von dem Maas der Dreyecke,

2) in der Geometrie der krummen Linien von den Kegelschnitten oder conischen Sectionen, nebst noch einigen andern Gattungen der krummen Linien, wie auch von sogenannten geometrischen Oertern, u. s. w.

III.

III. Von der Fluxionenrechnung oder von der Kunst zu differentiiren und zu integriren, als welche beedes der allgemeinen und besondern Geometrie zu statten kommt, auch aus Betrachtung der geometrischen Figuren erfunden worden ist, folglich zur Geometrie mit Grund gerechnet wird.

I. Cap.

Von der dreyfachen Ausmessung der Körper überhaupt.

§. 136.

Von dem Begriff der geometrischen Grössen.

Wenn man sich einen richtigen Begriff von den geometrischen Grössen bilden will, so muß man nicht von Punkten, sondern bey dem andern Ende von Körpern anfangen. Körper sind vorhanden, und man stellt sich selbige in der Geometrie als etwas zusammenhangendes, und dergestalten vor, daß, wo ein Theil aufhöret, sogleich der andere unmittelbar anfangt. Das ist das sogenannte Continuum. Ein Körper gehet nicht ohne Ende fort; er hat seine Grenzen, und diese Grenzen heißt man

was das Continuum seye.

was Flächen, Flächen. Die Fläche ist da, wo der Körper aufhöret, und also kein Theil vom Körper: dann wo noch ein Theil vom Körper vorhanden ist, da hört er nicht auf.

was Linien und was Punkte überhaupt seyen; Wo Flächen aufhören, sind Linien, und wo Linien aufhören, Punkte. Der Punkt kann also nicht eher gedacht und vorgestellt werden, es sey dann, daß es Linien, Flächen und Körper gebe.

warum es Punkte gebe; Wofern aber eine stetige Ausdehnung vorhanden ist, die ihre Grenzen hat, so müssen sich diese Grenzen endlich in Punkte verlieren. Punkte sind also nichts, als

was ein Körper seye, die letzte Grenzen der Körper: dann Körper heißt man in der Geometrie alles dasjenige, was in die Länge, Breite und Höhe ausgedehnt ist. Die Grenzen der Körper

warum eine Fläche keine Höhe, sind Flächen; sie haben also eine Länge und Breite, aber keine Höhe, sonst wären sie keine Grenzen, sondern Theile des Körpers, oder wiederum Körper. Die Grenzen der Flächen sind Linien; sie ha-

eine Linie keine Breite, ben also eine Länge, aber keine Breite, sonst wären sie Theile der Flächen, oder wiederum wirkliche Flächen. Die Gren-

und ein Punkt keine Länge, folglich gar keine Ausdehnung ha- zen der Linien sind Punkte; sie haben also keine Länge, sonst wären sie Theile der Linien, folglich wiederum Linien, und keine Punkte. Aus gleichem Grunde erhellet, daß die Punkte noch vielweniger eine Breite und Dicke haben; sonst wären sie Flächen oder gar Körper, und könn-

ten

ten dahero nicht die äusserste und letzte Grenzen aller Körper heissen. Darum sagt man, ein Punkt seye untheilbar, und diese Untheilbarkeit wird der Verstand aus der gegebenen Erklärung leicht begreiffen. Eben so wird man auch aus den bisherigen unlaugbaren Gründen einsehen, warum eine Linie nicht aus Punkten bestehen könne, oder warum die Punkte keine Theile der Linien seyen, und wie die sonst hier einem vorkommende Einwendungen auf einmal durch die gegebene Erklärung abgeschnitten werden. Insgemein sagt man: eine Linie entstehe durch einen bewegten Punkt; oder der Weg, den ein Punkt durch seine Bewegung zurück lege, sey eine Linie. So viel richtiges dieser Ausdruck auch haben mag, so gab er doch je und je zu irrigen Gedanken Anlaß genug. Dann davon will ich nicht reden, daß diese Erklärung den Begriff einer Linie schon voraussetze, weil sich die Bewegung eines Punkts ohne eine gewisse Richtung nicht gedenken läßt, eine Richtung aber, wornach er sich bewegt, allemal eine Linie ist; sondern das solle jetzo gezeigt werden, wie die letztere Erklärung einen ganz natürlich auf die Gedanken bringe, eine Linie bestehe aus Punkten. Ein Punkt beschreibt durch seine Bewegung eine Linie; wann sich also der Punkt A nach Z bewegt, so läßt er

be, und dahero untheilbar genannt werde?

Ob eine Linie aus Punkten bestehen könne?

Was von der Erklärung der Linie durch die Bewegung eines Punkts zu halten seye,

und wie diese Erklärung den Begriff der Linie schon voraus setze;

woher es komme, daß manche sich

einbilden, die Linien bestehen aus aneinander gränzenden Punkten, und wie sie ihre Meynung mit Scheingründen unterstützen.

überall Spuren und Merkmale

A ——————————— Z
B C D E

in B, C, D u. s. w. von sich zurücke; folglich wird die Summe aller dieser Merkmale, das ist die Summe aller Punkte, zusammengenommen, die Linie AZ bestimmen. Nun will ich zeigen, wie man auf diese Erklärung der Linie gekommen ist. Die Linie AZ kann eher noch aufhören, als erst in Z; sie kann z. E. in B, C, D u. s. w. aufhören; wo sie nun aufhöret, da giebt es Punkte. Ja weil sie, wie wir hören werden, unendlich theilbar ist, so kann sie an unendlich viel Orten aufhören; folglich giebt es in der Linie AZ unendlich viele Punkten. Demnach ist es eben so viel, als wenn der Punkt A sich nach und nach bis Z bewegte, und durch diese Bewegung die Linie erzeugte, aber auch zugleich überall Spuren seines Daseyns, das ist, Punkte zurück liesse. Nun müssen wir auf diesen Einwurf, durch welchen manche scharfsinnige Gelehrten sich je und je haben irre machen lassen, umständlich antworten.

Beantwortung dieser Gründe, nebst einem aus-

Die Sache hat ihre Richtigkeit. Die Linie AZ kann an unendlich vielen Orten aufhören, und wo sie aufhört, da giebt es Punkte; darum lassen sich unendlich viele Punkten in der Linie AZ gedenken. Das ist unlaugbar, aber die Folge ist nicht

rich-

richtig: Es giebt überall Punkte in der Linie, darum besteht die Linie aus Punkten; denn wenn wir die Erklärung des Punktes in diesem Schluß für den Punkt selbst setzen, so heißt er so: die Linie kann aufhören, wo man will; folglich besteht sie aus den Grenzen, an welchen sie aufhört. Diese Folge ist grundfalsch. Wir wollen ein Exempel geben. Ein Capitalist soll ein Vermögen von 100000 fl. haben: dieses kann nun auf unendlich viele Weise kleiner werden; und es bleibt doch noch ein Vermögen. Z. E. es kann aufhören bey 100, bey 200, bey 300, bey 1000, bey 10000. fl. u. s. w. Die Grenzen, wo es aufhören kann, gehören nicht mehr zum Vermögen; sonst wären es nicht die Grenzen, sondern noch ein Theil des Vermögens. Wenn ich nun sagte, weil das Vermögen von 100000 fl. aufhören kann, wo man will, so bestehet es aus den Grenzen, wo es aufhöret: wie ungereimt wäre dieses gedacht, und wie leicht wäre es einem reich zu werden, wenn die Folge wahr wäre, ein Ding bestehet aus den Grenzen, wo es aufhören kann? Es ist noch ein Einwurf übrig. Man sagt, die Linie AD solle von der Linie AE nur so unterschieden seyn, daß nur ein einiger Punkt den Ueberschuß ausmache, und folglich D und E zwey unmittelbar an einander gehende Punkte seyen.

führlichen Beweis, daß die Linie nicht aus Punkten bestehe, oder daß die Punkte keine Theile der Linien seyen;

Warum es unmöglich, daß zween

Punkte einander unmittelbar berühren;

Eine solche Nachbarschaft der Punkte erkennet die Geometrie nicht. Wir wollen aber darauf antworten, und die Unmöglichkeit der Bedingung zeigen. D ist die Grenze von AD, und E die Grenze von AE. Zwischen E und D ist keine Entfernung, das ist ED hat nach der Bedingung des Einwurfs keine Länge mehr, weil der Punkt E unmittelbar an D grenzet, und dahero keine Zwischenlinie übrig läßt. Folglich ist DE keine Linie oder keine Entfernung, dahero $AD + DE = AD$, und also $AE = AD$. Die beede Linien AD und AE sind also gleich lang, demnach hören sie an einem Orte auf; folglich ist D und E nur ein Punkt. Hieraus ist nun klar, daß der obige Einwurf etwas widersprechendes in sich halte; denn es würde daraus folgen, zwo gleich lange Linien seyen nicht gleich lang. Wenn aber die Theile der Linien wiederum Linien sind, und sich so viel Linien denken lassen, als Punkte sind, in welchen eine Linie durchschnitten wird; so ist klar, daß die Theilung der Linien ins unendliche fortgehen könne, weil man niemalen auf Punkte kommt, sondern immer Linien erhält, welche wieder theilbar sind; dahero die Linie unendlich theilbar ist. Das was wir bisher gesagt haben, trägt der berühmte Hr. Prof. Kästner in einem besondern Aufsatz, der in des Hamb. Magazin IV.

und wie deßwegen eine Linie, wenn sie auch unendliche mal getheilt würde, immer in Linien getheilt werde, dahero die Linie unendlich theilbar ist.

Band

Band. S. 46. folgg. zu lesen ist, mit mehrerem vor. Es wird daher unsern Lesern nicht unangenehm gewesen seyn, daß auch wir diese wichtige Grundbegriffe von Flächen, Linien und Punkten umständlich erläutert haben; weil doch ungemein viel darauf ankommt, daß man die erste Gründe aller Wissenschaften recht inne habe.

Von der geometrischen Sprache und Schreibkunst.

§. 137. Ehe wir weiter gehen, müssen wir auch die geometrische Sprache und Schreibekunst erläutern. Es fragt sich billig: wie man Punkte, Linien, Winkel, Figuren u. s. w. schreiben und recht lesen oder aussprechen solle? In der ersten Tafel der geom. Figuren kommen dergleichen Zeichnungen vor. Man schreibt eine Linie, wenn man an ihren beeden Enden grosse Buchstaben setzt, und sie hernach zusammen verbindet, da es dann heißt, die Linie AB, die Linie AC, die Linie AE; will man sich der Kürze befleissigen, so kann man auch eine Linie durch einen einigen kleinen Buchstaben ausdrukken, und z. E. sagen, die Linie AB solle a oder b, oder x heissen, je nachdem sie bekannt oder unbekannt, folglich erst zu suchen ist. Wir werden uns aber des ersten Ausdrucks öfters bedienen. Ein Winkel ist die Neigung zweyer Linien, die in einem Punkt zusammen stosen. Man schreibet ihn auf eine doppelte Weise.

Tab. I. Fig. 2. Wie man eine Linie schreibe und ausspreche?

Tab. I. Fig. 3. Die Art einen Winkel zu schreiben

und auszudrucken, welches auf eine doppelte Weise geschehen kann.

Dann entweder braucht man drey grössere Buchstaben, und setzet sie an die Grenzen der Linien, da dann im schriftlichen Ausdruck derjenige Buchstabe jedesmal in die Mitte gesetzt wird, der an der Neigung der beeden Linien stehet. Z. E. ABC heißt der Winkel ACB, und nicht ABC oder BAC; weil C die Neigung der beeden Linien ausdruckt, folglich in der Mitte stehen muß.

erste Art,

Die andere Art ist, wenn man innerhalb des Winkels, wo die Neigung ist, einen kleinen Buchstaben, o, x, y, n, u. s. w. hineinschreibet, und sodann sagt, der Winkel o, der Winkel x, u. s. w. Beede Schreibarten werden gebraucht, je nachdeme die Schicklichkeit der Rechnung es erfordert.

zweyte Art des Ausdrucks.

Ein Dreyeck wird durch die an den drey Ecken der Figur beygesetzte und sodann zusammengeschriebene grössere Buchstaben ausgedruckt, wobey gemeiniglich zum Unterschied von den Winkeln ein Δ den Buchstaben vorangesetzt wird. Z. E. das Δ ABC, heißt das Dreyeck ABC. Da es dann gleichgültig ist, wie die Buchstaben verbunden werden, ob sie ABC, oder ACB, oder CAB, u. s. w. heissen.

wie ein Dreyeck geschrieben werde;

Tab. I. Fig. 8.

Wie man den Inhalt eines Dreyecks ausdrucke, werden wir an seinem Ort zeigen: denn wenn die Grundlinie b, und die Höhe a heisset, so ist der Inhalt $\frac{a\ b}{2}$; dieses aber gehört noch nicht

hie-

hieher. Einem Viereck werden an den vier Ecken gleichfalls grössere Buchstaben zugegeben, welche sodann im Schreiben zusammengesetzt werden, z. E. das Viereck ABCD. Wenn man nicht gern so viel Buchstaben schreibt, so setzt man zuweilen die einander creuzweis entgegen stehende Buchstaben zusammen, und sagt das Viereck AC oder DB. u. s. w. Wie man es durch die Multiplication der Grundlinie b, in die Höhe a, welches ab giebt, u. s. w. ausdrucken könne, wollen wir an seinem Ort zeigen. Ein Bogen, oder überhaupt eine krumme Linie, wird wie eine gerade Linie geschrieben und ausgesprochen; so sagt man z. E. der Bogen AS, der Bogen SR u. s. w. Punkte werden durch einzele Buchstaben angezeigt; so sagt man der Mittelpunkt C, der Punkt A, der Punkt B u. s. w. Das sind bey nahe die vornehmsten Ausdrücke, die man sich in dem geometrischen Alphabet zuerst bekannt machen muß. Wir werden, wenn wir weiter kommen, wie bey der Arithmetik, also auch in der Geometrie die noch ruckständigen Ausdrücke nach und nach in derjenigen Ordnung vollends hinzuthun, in welcher sie erklärt und von den Lesern verstanden werden können. Anfänger haben inzwischen an dem bisherigen genug.

wie ein Viereck,

Tab. II. Fig. 25.

ferner wie ein Bogen oder eine krumme Linie überhaupt, und wie die Punkte ausgedruckt werden.

Tab. I. Fig. 4.

Der erste Theil der dreyfachen Ausmessung begreifft das Längenmaas.

§. 138. Nun kommen wir der Hauptsache näher, und tragen von der dreyfachen Ausmessung der Körper denjenigen Theil zuerst vor, der das **Längenmaas** oder die **Longimetrie** in sich begreifft. Eine Länge wird durch eine Länge, wie eine Breite durch eine Breite und ein Körper durch einen Körper ausgemessen. Da sich nun eine blose Länge allemal durch eine Länge ausdrucken läßt; so siehet man, daß Linien und Längen hier einerley heissen, folglich das allgemeine Maas in der Longimetrie Linien seyen. Nun giebt es gerade und krumme Linien: die gerade werden durch gerade Linien ausgemessen; bey den krummen kommt es auf die Frage an, ob ich die Länge der Linien an und vor sich selbst, oder nur ihre Krümme, theils überhaupt, theils nach ihrer bestimmten Grösse wissen will. In jenem Fall muß ich sie gerade machen oder rectificiren; diese schwere Kunst gehört noch nicht in dieses Capitel. Im letztern Fall muß ich eine krumme Linie von ihrer Art zum Maas nehmen, daß ich sagen kann, sie gehört zu dieser oder jenen Classe der krummen Linien; dann sie hat diese oder jene Eigenschaft, welche die mir bekannte krumme Linie auch hat. Habe ich nun dieses einmal gefunden, so suche ich die Grösse der krummen Linie, das ist, die Verhältniß des auszumessenden Theils zu der ganzen krum-

Wie man eine Länge oder Linie messen könne;

und besonders wie die gerade und hernach wie die krumme Linien in Absicht auf ihr Maas anzusehen seyen.

krummen Linie, von deren Gattung der gegebene Theil ist. Auch diese Kunst ist, wenn ich die einige Cirkellinie ausnehme, jetzo noch zu hoch, und kann in dem gegenwärtigen Capitel nicht vorgetragen werden. Wir werden dahero nur von geraden und cirkelförmigen Linien handeln. Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg, oder die kürzeste Entfernung zwischen zweyen Punkten; man muß sich aber die mathematische Linie als eine solche Linie vorstellen, die durch alles dringet, und von dem härtesten Marmor nicht aufgehalten wird. So ist z. E. der kürzeste Weg von dem Punkt, worauf ich aufstehe, zu meinen Gegenfüßlern in America die Linie, die mitten durch die Erde durchgehet, und sich nichts in den Weg legen läßt; man siehet dahero schon, wie der kürzeste Weg hier verstanden werde. Ein Seefahrer kann nicht anders als durch eine zu Wasser beschriebene krumme Linie nach America kommen; und doch ist diß, wenn er durch keinen Sturm zerschlagen wird, der kürzeste Weg, der ihm äusserlich möglich ist. Allein er macht ihn auch wirklich, und nicht blos in Gedanken, wie der Meßkünstler, der seine mathematische Linie blos in Gedanken durch die Erde hindurch ziehet. Inzwischen siehet man schon, daß solche mathematische Linien möglich sind; dann was sich denken läßt,

Warum man in diesem Capitel nur von geraden, und unter den krummen Linien, von keinen andern als von Cirkellinien handle.

Was eine gerade Linie sey;

und wie man sich die mathematische Linie vorstellen müsse;

wie auch, was man unter dem kürzesten Weg im absoluten und mathematischen Begriff verstehe;

Möglichkeit der mathematischen Linien.

ist möglich. Nun läßt sich eine Linie in Gedanken durch die Erde ziehen; folglich sind dergleichen mathematische Linien nichts widersprechendes. Weil ferner zwischen zween Punkten nur ein einiger Weg sich denken läßt, der der allerkürzeste heisset; so ist ganz natürlich, daß es nur eine einige Classe von geraden Linien gebe, und daß folglich in mathematischem Verstand keine mehr oder weniger gerade als die andere sey. Eben so erhellet auch, daß eine **gerade Linie durch zwey Punkte vollkommen bestimmt werde**, weil zwischen zween Punkten nicht mehr als eine gerade Linie möglich ist. Hingegen von krummen Linien wird es eine Menge Gattungen geben; man darf nur auf dem Papier zwey Punkte annehmen, und es versuchen, ob man nicht durch eine Menge krummer Linien von einem Punkt zum andern kommen könne. Eben so kann man durch die Betrachtung der Natur die Verschiedenheit der krummen Linien erkennen. Die Cirkellinie ist die allergemeinste. Wenn ich aber nur ein Ey ansehe, so sehe ich schon eine andere Gattung von krummen Linien, welche man die Ovallinie heißt; sehe ich ein Schneckenhaus an, so sehe ich eine neue Gattung krummer Linien, welche deswegen Schneckenlinien genannt werden u. s. w. Da es nun so eine unzählbare Menge

Warum es nur eine Classe von geraden Linien gebe, und warum durch zween Punkte allemal eine gerade Linie nicht aber eine krumme, bestimmt werde?

Warum es so mancherley krumme Linien gebe;

und wie man sich selbige durch die Betrachtung der Natur bekannt machen könne;

von krummen Linien giebt, so ist es gar kein Wunder, daß die Erfindungskunst besonders in der sogenannten höhern Geometrie immer mehr bereichert, und mit neuen Exempeln vermehret wird. Weil aber keine gemeiner ist, als die Cirkellinie, so hat man sie sogleich schon von Alters her je und je in den ersten Gründen der Geometrie vorgetragen, und das mit desto grösserm Recht, weil sie das Maas der Winkel zu bestimmen unumgänglich nöthig, und die Lehre von den Winkeln eine der ersten und vornehmsten Lehren in der Geometrie ist; wie wir sogleich hören werden.

Warum die Cirkellinie gleich anfangs in den geometrischen Lehrbüchern erklärt werden müsse.

§. 139. Gerade Linien werden durch gerade Linien gemessen. Denn messen heißt nichts anders, als anzeigen, wie oft eine Linie in der andern enthalten seye, oder wie sich eine gegebene Linie zu einer andern verhalte. Man nimmt also zum Maasstab eine Linie an, welche man eine Ruthe nennt, und durch das hinten angehängte Zeichen 1° schreibet; der zehente Theil einer Ruthe heißt ein Schuh, und wird geschrieben 1', der zehente Theil eines Schuhes heißt ein Zoll, und wird geschrieben 1'', und der zehente Theil eines Zolles heißt eine Linie, und wird geschrieben 1'''. So theilet die Geometrie ihr Längenmaas, und hat dabey den Vortheil, daß sie durch Hülfe der Decimal-

Von dem Maas der geraden Linien, an und vor sich selbst, wozu man Ruthen, Schuhe, Zolle nöthig hat, nebst einer Erklärung

dieser Rechnung. progression und Decimalbrüche, eine Linie nicht nur kurz ausdrucken, sondern auch, wenn man multiplicirt und dividirt, Zeit und Mühe ersparen kann. So sind z. E. 36482 Linien, 36° 4′ 8″ 2‴ das ist, 36 Ruthen, 4 Schuhe, 8 Zoll, 2 Linien. Die gemeine Feldmesser hingegen gehen von diesem Maase ab, und man merkt fast in einem jeden Land eine Verschiedenheit; bey uns hat die Ruthe 16 Schuhe, ein Schuh 12 Zoll u. s. w. Wir werden aber künftighin die eigentlich geometrische Rechnung gebrauchen, und, wo nichts besonders angemerkt wird, allemal geometrische Ruthen, Schuhe, Zoll und Linien verstehen.

Von dem Maas der Neigung zwoer geraden Linien gegen einander; oder von dem Winkelmaas;

§. 140. Man mißt die gerade Linien nicht nur an und vor sich selbst, in so ferne sie solche gerade Linien sind, sondern man kann auch ihre Verhältnisse ausmessen. Eine der ersten und vornehmsten Verhältnisse zweyer geraden Linien gegen einander bestehet darinnen, wenn sie durch eine gewisse Neigung gegen einander in einem Punkte endlich zusammen stosen; da man dann die Grösse dieser Neigung zu wissen verlangt.

was ein Winkel seye,

Man heißt eine solche Neigung einen geradelinichten Winkel; dann es giebt auch krummlinichte Winkel.

und wie man hier nur von geradelinichten und nicht

Wir werden aber, um uns kürzer ausdrucken zu können, so oft wir das Wort Winkel ohne einen Beynamen gebrauchen,

chen, einen geradelinichten Winkel darunter verstehen; wo wir aber, welches selten geschehen wird, krummlinichte nöthig haben, das letztere Beywort hinzusetzen. Nun fragt man, wie die Neigung zweyer geraden und in einem Punkt zusammen kommender Linien gegen einander, das ist, wie ein Winkel ausgemessen werde? Durch eine gerade Linie kommt man hie nicht zu recht. Denn wenn ich den Winkel ACB durch eine gerade Linie ausmessen wollte, so müßte ich in der Linie AC und BC Punkte annehmen, und zwischen selbigen Linien ziehen. Nun giebt es in diesen beeden Linien eine Menge von Punkten. §. 136. Folglich liesse sich auch eine Menge von Linien ziehen, davon immer eine grösser als die andere würde, je nachdeme ich dem Punkt C mehr oder weniger nahe käme. Ich würde also kein bestimmtes Maas für den Winkel ACB finden können. Man versucht dahero die Arbeit mit krummen Linien, und weil wir in der gemeinen Geometrie keine andere als Cirkellinien wissen, vornemlich mit Cirkelbögen. Dieses zu bewerkstelligen, müssen wir wissen, was ein Cirkel seye. Ein Cirkel entsteht, wann sich eine gerade Linie um einen festen Punkt herum beweget. Z. E. die Linie AC solle sich um den festen und unbeweglichen Punkt C herum bewegen, daß sie nach und nach die

von krummlinichten Winkeln rede;

Warum man einen Winkel nicht durch gerade Linien messen könne.

Tab. I. Fig. 3.

Wie man dahero eine krumme Linie zu seinem Maas nöthig habe;

und wie diese Linie die Cirkellinie seye;

Tab. I. Fig. 4.

Linie

Erklärung des Cirkels, und der dabey vorkommenden Namen, der Peripherie,

Linie SC, RC, CB, CI bedeckt, und endlich wieder in AC kommt; so wird die daraus beschriebene Figur ein Cirkel, und die äusserste krumme Linie ASRBIA die Peripherie des Cirkels genannt. Man kann die gegebene genetische Erklärung des Cirkels durch einen gemeinen Versuch, z. E. durch einen Faden, der immer in gleicher Länge gehalten, und um einen Punkt herum beweget wird, leicht in die Uebung bringen. Der Punkt C, um welchen die Bewegung geschiehet, heisset der **Mittelpunkt.** (Centrum.) Die herumbewegte Linie, (oder im Exempel, der herumbewegte Faden) heißt der **Radius.** Da nun diese Linie überall im Cirkel sich selbst gleich bleibet, so ist klar, daß alle **Radii**, das ist, alle gerade Linien, die von dem Mittelpunkt an die Peripherie gezogen werden, **einander gleich** seyen. Demnach sind AC, CS, CR, CB, CI, als Radii des Cirkels, einander gleich. Es sind noch einige gerade Linien im Cirkel übrig. Eine Linie, die von einem Punkt der Peripherie D zum andern E gezogen wird, und nicht durch den Mittelpunkt gehet, heißt überhaupt eine **Sehne**; (Chorda) z. E. die Sehne DE. Gehet sie aber durch den Mittelpunkt C, so heißt sie der **Diameter** (Durchmesser). z. E. die Linie AB; folglich ist der Diameter der dop-

des Mittelpunkts,

des Radius, wobey gezeigt wird, daß alle Radii einander gleich seyen,

der Sehnen,

des Diameters, welcher

pelte Radius, weil AB = AC + CB = 2AC. Wenn also der Radius r heißt, so darf ich allemal für den Diameter 2r setzen. Ferner ist aus gleichem Grunde der Radius allemal der halbe Diameter:

der doppelte Radius ist, u. s. w.

$$\text{dann } AB = 2\,AC$$

$$\text{und dahero } \frac{AB}{2} = AC$$

Wenn also der Diameter a heisset, so wird der Radius $\frac{1}{2}$a seyn. Die Theile der Peripherie heißt man Bögen; z. E. der Bogen AS, der Bogen SR, der Bogen RB u. s. w. Den Cirkel beschreibt man durch ein unsern Lesern so bekanntes Instrument, daß es unnöthig wäre, es erst zeichnen zu lassen. Wir merken nur so viel, daß das Instrument selbst der Zirkel mit dem Z, (Circinus lat. und französisch Compas) die dadurch beschriebene Figur aber ein Cirkel mit dem C heisse, (lat. Circulus, französisch Cercle). Die krumme Linie, das ist die Peripherie des Cirkels, wird in 360 gleiche Theile eingetheilt, weil sich diese Zahl mit vielen andern leicht und ohne Rest dividiren läßt. Diese Eintheilung ist willkührlich; dann man könnte des Cirkels Umfang eben sowohl in 1000, oder 100, oder 60 Theile u. s. w. theilen; wir haben aber schon gesagt, warum man die Eintheilung in 360 gewählt und vorgezogen habe. Derjenige kleine Cirkelbogen, wel-

Die Theile der Peripherie heissen Cirkelbögen oder schlechtweg in der gemeinen Geometrie Bogen;

Von dem Instrument, womit ein Cirkel beschrieben wird.

Warum die Peripherie des Cirkels gerad in 360 Theile getheilt werde.

und wie ein solcher Theil ein Grad, und der sechzigste Theil eines Grades eine Minute u. s. w. genannt werde;

cher der 360ste Theil von seinem ganzen Cirkel ist, heißt allemal ein **Grad**, und wird wie ein Längenmaas geschrieben 1°; der sechzigste Theil eines Grades heißt eine **Minute** (minutum primum) und wird geschrieben 1′; der sechzigste Theil einer Minute heißt eine Secunde (minutum secundum), und wird geschrieben 1″; der sechzigste Theil einer Secunde heißt eine Terz, (minutum tertium) und wird geschrieben 1‴ u. s. w. Folglich gehet hier die Rechnung nach Sexagesimalbrüchen, bey welchen die Zehler eins, und die Nenner in einer geometrischen Progreßion fortgehen, deren Exponent 60 ist, z. E. $1, \frac{1}{60}, \frac{1}{60 \cdot 60}, \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 60}$ u. s. w. Denn dieser Ausdruck heißt eben so viel, als ein Grad, eine Minute, eine Secunde, und eine Terz; folglich kann ich ganze Zahlen dafür setzen, wie bey den Decimalbrüchen, wenn ich nur die Nenner im Sinn hinzudenke, wiewohlen die Namen **Minute**, **Secunde**, **Terz** u. s w. wirklich die Nenner anzeigen; man kann dahero die vier Rechnungsarten wie bey genannten Zahlen hier anbringen, wenn man nur weiß, daß allemal sechzig Minuten ein Grad, 60 Secunden eine Minute u. s. w. machen. Hier sind nun die gemeine Feldmesser der Geometrie getreuer als bey dem Längenmaas: dann überall wird der Cirkel in 360 Grade, und der

Erklärung der Sexagesimalrechnung, welche hier vorzüglich und fast allein gebraucht wird, und zu wissen nöthig ist.

Grad

Grad in 60 Minuten u. s. w. eingetheilt. Diese Eintheilung ist bey allen Cirkeln, sie mögen groß oder klein seyn, angenommen; nur sind die Grade bey einem grossen Cirkel grösser, als bey einem kleinen u. s. w. Man siehet dahero schon, wie man einen Bogen mißt, und wie seine Grösse durch die Anzahl der Grade, die er hat, bestimmt wird. Eben so begreifft man, wie ein Winkel gemessen werde. Denn zwischen den beeden Linien, welche einen Winkel durch ihre Neigung bestimmen, läßt sich allemal ein Cirkelbogen beschreiben, wenn man den einen Schenkel des Zirkelinstruments in den Punkt C, wo die Linien zusammen stossen, setzet, und hernach mit beliebiger Eröffnung den Bogen DB beschreibt. Allein jetzo werden meine Leser die obige Gedanken von den geraden Linien auch hier anbringen und sagen: man kann eine Menge von Punkten in den beeden Linien CD und CB annehmen, und hernach Bögen zwischen denselben beschreiben; folglich haben wir auch hier kein bestimmtes Maas für den Winkel, wenn wir schon die gerade Linien ausgemustert und Cirkelbögen dafür angenommen haben. Es ist der Mühe werth, daß man darauf antwortet. Ich sage, es ist gleichviel, ob ich mit einer grossen oder kleinen Eröffnung des Zirkels den Bogen beschreibe;

Warum ein grosser, wie ein kleiner Cirkel, einerley Anzahl von Graden habe, und wie das Maas eines Winkels durch die Anzahl der Grade, die der zwischen seinen Schenkeln gezogene Bogen hält, bestimmet werde;

Tab. I. fig. 5.

nebst einer Anzeige, wie der Bogen beschrieben werden müsse.

Was von dem Einwurf zu halten, wenn man sagt, man könne zwischen den zween Schenkeln eines Winkels unendlich viel Bögen ziehen, deren immer

einer grösser als der andere, folglich seye das Maas des Winkels auch im Cirkelbogen unbestimmt;

dann alle Bogen zwischen CD und CB sind in Rucksicht auf die Anzahl ihrer Grade einander gleich. Darum ist sowohl db als DB das Maas des Winkels DCB oder n. Diß wird sich bald zeigen. Man darf nur den Cirkel oder halben Cirkel vollends beschreiben, so hat man ADB und adb; Nun ist DB ein eben so grosser Theil von seinem halben, folglich auch ganzen Cirkel ADB, als db von dem seinigen abd ist. Weil nun der grosse wie der kleine 360° enthält, so werden auch die Stücke db und DB eine gleiche Anzahl Grade und Minuten haben; nur werden die Grade von db kleiner als die von DB seyn, weil die Grade vom kleinern Cirkel überhaupt kleiner als die vom grössern sind. Daran aber ist nichts gelegen. Denn ich will nicht wissen, wie groß der rectificirte Bogen DB, oder der in eine gerade Linie zu verwandelnde Bogen DB seye, sondern wie groß er als ein Bogen seye, das ist, wie viel er Grade habe, oder der wievielte Theil er von seinem ganzen Cirkel seye? Das finde ich nun, ich mag den Cirkel mit einer grossen oder kleinen Oeffnung des Instruments beschrieben haben. Nun glaube ich, erwiesen zu haben, daß es gleichviel seye, ob man einen Winkel durch einen dem Punkt C mehr oder weniger nahen Bogen ausmesse. Warum man aber Cir-

Beantwortung dieser Gedanken, nebst einer umständlichen Anzeige, warum es gleichviel seye, ob man mit einer grossen oder kleinen Eröffnung des Zirkels den Bogen beschreibe, und wie ein kleiner Bogen zwischen einerley Schenkeln des Winkels eben so viel Grade halte als ein grosser.

Cirkelbögen überhaupt zu diesem Maas nöthig habe, ist aus der Natur der Winkel klar. Ein Winkel kann entstehen, wenn sich von zwo auf einander liegenden geraden Linien die eine von der andern ohne Krümme hinweg bewegt, doch so, daß sie immerdar an dem äussersten Punkt mit der andern noch zusammen hängt. Durch diese Bewegung können nun keine andere als Cirkelbögen entstehen. Man darf nur das Instrument, das der Zirkel genannt wird, nach und nach öffnen, so werden immer grössere Winkel dadurch, aber auch zugleich und mit den Winkeln Cirkelbögen entstehen; welche folglich das Maas der Oeffnung oder ihre Grösse bestimmen. Unsere Leser wundern sich ja nicht, daß wir so umständlich von diesen Materien handeln. Es ist an den ersten Grundideen, wie in allen Wissenschaften, also auch in der Mathematik, ungemein viel gelegen. Der Hr. von Leibniz pflegte deßwegen zu sagen: er seye ein Gegenfüßler der gemeinen Gelehrten, was diesen am leichtesten vorkomme, nemlich die Lehre von den ersten Grundsätzen, das sey ihm am schwersten; hingegen werde ihm hernach dasjenige desto leichter, was ihnen schwer und unauflößlich seye. Was nun die wirkliche Ausmessung der Winkel betrifft, so geschiehet sie durch den sogenannten Transporteur; wel-

Warum man blos Cirkelbögen und keine andere krumme Linien zum Maas der Winkel gebrauchen könne, wird aus der Natur, wie ein Winkel entstehen kann, erwiesen.

Warum man diese Lehre so umständlich abhandle.

Warum man von der praktischen Ausmessung der Winkel und folglich auch von dem sogenannten Transporteur nicht besonders

handle, und wie ein Geometra nichts als den Zirkel und das Lineal nöthig habe.

welcher aber zum practischen Ausmessen gehöret. Die Theorie kann ihn entbehren. In der Euclideischen Schule dürfte man so nichts weiter als den Zirkel und das Lineal gebrauchen.

Von den verschiedenen Verhältnissen der Winkel gegeneinander.

was Perpendicularlinien seyen, und wie durch dieselbe rechte Winkel entstehen,

was stumpfe und spitzige Winkel seyen.

§. 141. Nunmehro können wir schon weiter gehen, und die verschiedene Verhältnisse der Winkel gegen einander betrachten. Wenn eine gerade Linie auf einer andern also aufstehet, daß sie sich auf keine Seite mehr als auf die andere neiget, so stehet sie perpendicular, oder senkrecht; und ein Winkel, der durch zwo auf einander perpendicular stehende Linien gemacht wird, heißt ein rechter Winkel. (angulus rectus). Diejenige Winkel, die grösser sind als ein rechter, heissen stumpfe (obtusi), welche aber kleiner sind, heissen spitzige Winkel. (anguli acuti.) Nun kann ich auf einer jeden geraden Linie einen halben Cirkel beschreiben, wenn ich einen Punkt nach Belieben annehme, und die eine Spitze des Zirkels auf den Punkt setze, mit der andern aber nach beliebiger Eröffnung die Cirkellinie beschreibe. Da ich aber auch aus jedem Punkt einer gegebenen Linie, andere gerade Linien ziehen kann, wodurch Winkel bestimmt werden: so müssen alle auf einer Linie aus einem Punkt gezogene Winkel zusammen einem halben Cirkel, das ist $\frac{360}{2} = 180°$ gleich seyn: und weil sich auf einer jeden Linie

Warum alle aus einem Punkt auf einer geraden Linie gezoge-

Linie eine Perpendicularlinie gedenken läßt, die Perpendicularlinie aber auf beeden Seiten rechte Winkel macht, so müssen auch zween rechte Winkel 180° gleich seyn; folglich wird ein rechter Winkel, die Hälfte von zween, auch der Hälfte von 180° das ist 90 Graden, oder dem vierten Theil des Cirkels, gleich seyn. Diese Sätze lassen sich nun auch aus den Figuren beweisen. Man heißt diejenige Winkel, welche auf einer Linie aufstehen, und aus einem Punkt gezogen werden, Nebenwinkel (anguli contigui, vel deinceps positi). Demnach sind die Winkel ACD und DCB, oder m und n Nebenwinkel. Das Maas des Winkels m ist der Bogen AD, und das Maas des Winkels n der Bogen BD. §. 140. Folglich ist

ne Winkel 180° zusammen ausmachen, oder zweyen rechten Winkeln gleich seyen, und wie ein rechter Winkel allemal 90° halte;

Was Nebenwinkel seyen,

Tab. I fig. 5.

und wie alle Nebenwinkel zusammen 180° halten,

$$m = AD$$
$$n = BD$$
$$m + n = AD + BD$$
$$180^\circ = AD + BD.$$
$$m + n = 180^\circ.$$

Wenn also der eine Winkel z. E. m gegeben, und 120° gleich wäre, so würde der andere leicht sich finden lassen; er wäre nemlich $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

und wie man aus einem gegebenen Nebenwinkel den andern finden könne.

Dann $m + n = 180^\circ$

nun seye $m = 120^\circ$

folglich $n = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

 Wenn

handle, und wie ein Geometra nichts als den Zirkel und das Lineal nöthig habe.

welcher aber zum practischen Ausmessen gehöret. Die Theorie kann ihn entbehren. In der Euclideischen Schule dürfte man so nichts weiter als den Zirkel und das Lineal gebrauchen.

Von den verschiedenen Verhältnissen der Winkel gegeneinander.

§. 141. Nunmehro können wir schon weiter gehen, und die verschiedene Verhältnisse der Winkel gegen einander betrachten. Wenn eine gerade Linie auf einer andern also aufstehet, daß sie sich auf keine Seite mehr als auf die andere neiget, so stehet sie perpendicular, oder senkrecht; und ein Winkel, der durch zwo auf einander perpendicular stehende Linien gemacht wird, heißt ein rechter Winkel. (angulus rectus). Diejenige Winkel, die grösser sind als ein rechter, heissen stumpfe (obtusi), welche aber kleiner sind, heissen spitzige Winkel. (anguli acuti.) Nun kann ich auf einer jeden geraden Linie einen halben Cirkel beschreiben, wenn ich einen Punkt nach Belieben annehme, und die eine Spitze des Zirkels auf den Punkt setze, mit der andern aber nach beliebiger Eröffnung die Cirkellinie beschreibe. Da ich aber auch aus jedem Punkt einer gegebenen Linie, andere gerade Linien ziehen kann, wodurch Winkel bestimmt werden: so müssen alle auf einer Linie aus einem Punkt gezogene Winkel zusammen einem halben Cirkel, das ist $\frac{360}{2} = 180^\circ$ gleich seyn: und weil sich auf einer jeden Linie

was Perpendicularlinien seyen, und wie durch dieselbe rechte Winkel entstehen,

was stumpfe und spitzige Winkel seyen.

Warum alle aus einem Punkt auf einer geraden Linie gezoge-

Linie eine Perpendicularlinie gedenken läßt, die Perpendicularlinie aber auf beeden Seiten rechte Winkel macht, so müssen auch zween rechte Winkel 180° gleich seyn; folglich wird ein rechter Winkel, die Hälfte von zween, auch der Hälfte von 180° das ist 90 Graden, oder dem vierten Theil des Cirkels, gleich seyn. Diese Sätze lassen sich nun auch aus den Figuren beweisen. Man heißt diejenige Winkel, welche auf einer Linie aufstehen, und aus einem Punkt gezogen werden, Nebenwinkel (anguli contigui, vel deinceps positi). Demnach sind die Winkel ACD und DCB, oder m und n Nebenwinkel. Das Maas des Winkels m ist der Bogen AD, und das Maas des Winkels n der Bogen BD. §. 140. Folglich ist

ne Winkel 180° zusammen ausmachen, oder zweyen rechten Winkeln gleich seyen, und wie ein rechter Winkel allemal 90° halte;

Was Nebenwinkel seyen,

Tab. I fig. 5.

und wie alle Nebenwinkel zusammen 180° halten,

$$m = AD$$
$$n = BD$$
$$m + n = AD + BD$$
$$180^\circ = AD + BD.$$
$$m + n = 180^\circ.$$

Wenn also der eine Winkel z. E. m gegeben, und 120° gleich wäre, so würde der andere leicht sich finden lassen; er wäre nemlich $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

und wie man aus einem gegebenen Nebenwinkel den andern finden könne.

Dann $m + n = 180^\circ$
nun seye $m \quad = 120^\circ$

folglich $n \quad = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Alle Winkel um einen Punkt herum halten 360° zusammen.

Wenn ferner der eine ein rechter Winkel ist, so muß es auch der andere seyn; dann wenn $m = 90$, so ist $n = 180 - 90 = 90$. Weil ich endlich um einen jeden Punkt einen Cirkel herumschreiben kann, so werden auch alle um einen Punkt herum beschriebene Winkel einem Cirkel, folglich auch seinem Maas, das ist 360° gleich seyn.

Was Verticalwinkel seyen?

§. 142. Die Verticalwinkel machen wieder eine andere Verhältniß der Winkel aus. Sie entstehen, wenn zween Winkel an ihren Spitzen zusammen stossen, und die verlängerte Schenkel einander durchkreutzen. So stellet ein lateinisch X Verticalwinkel vor. Nun ist dieses die Eigenschaft der Verticalwinkel, daß sie alle einander gleich seyen. Folglich $o = x$; dann

Tab. I. fig. 6.

Alle Verticalwinkel sind einander gleich;

$$o + n = 180° \quad §. 141.$$
$$x + n = 180°$$
$$\overline{o + n = x + n} \quad §. 9.$$
$$n = n$$
$$\overline{o = x.}$$

Fruchtbarkeit der beeden erwiesenen Lehrsätze.

Diese zween Lehrsätze von den Nebenwinkeln sowohl als von den Verticalwinkeln muß man sich wohl bekannt machen; dann sie kommen im folgenden ungemein oft wiederum vor. Ehe wir aber weitere Verhältnisse der Winkel unsern Lesern vortragen, müssen wir einen Begriff

griff aus der Metaphysik entlehnen, und zeigen, was eine Figur ist. Wenn ein Continuum durch ein anderes Continuum seine bestimmte Grenzen allenthalben bekommt, so sagt man, es seye eine Figur. Ein Winkel ist also keine Figur im eigentlichen Verstande; es sey dann, daß die Oeffnung durch eine Linie vollends geschlossen werde. Folglich wird die allereinfacheste geradlinichte Figur ein Dreyeck seyn: denn geradelinichte Zweyecke lassen sich nicht denken. Entweder divergiren die Linien, und stosen nur in einem Punkt zusammen, oder sie fallen in allen Punkten zusammen. Ist jenes, so giebt es Winkel; ist dieses, so bekommt man die vorige gerade Linie wieder, ohne eine Figur. Folglich ist das Dreyeck die erste geometrische Figur, die aus geraden Linien entstehen kann.

Was eine Figur seye.

Warum ein Winkel keine Figur seye,

und wie deßwegen die allereinfacheste und erste geradelinigte Figur ein Dreyeck seye; daher ein geradelinigtes Zweyeck ein Unding ist.

§. 143. Ein Dreyeck bestehet aus drey Seiten und drey Winkeln; man kann es also nach den Seiten und Winkeln betrachten. Was die Seiten betrifft, so können entweder alle drey Seiten einander gleich seyn, da es dann ein gleichseitiges Dreyeck gibt (Triangulum æquilaterum,) oder es können nur zwo Seiten einander gleich seyn; in welchem Fall ein gleichschenklichtes Dreyeck heraus kommt (triang. æquicrurum vel isosceles); oder es kann auch seyn, daß gar keine Seite der andern gleich ist,

Wie vielerley Gattungen von geradelinigten Dreyecken es gebe;
In Rucksicht auf die Seiten bemerkt man das gleichseitige,

das gleichschenklichte,

folglich das Dreyeck ungleichseitig wird (triangulum scalenum.) In Absicht auf die Winkel giebt es wiederum drey Fälle. Dann wann in einem Dreyeck ein rechter Winkel ist, so hat man ein rechtwinklichtes Dreyeck, (Triang. rectangulum;) ist ein stumpfer darinnen befindlich, so ist das Dreyeck stumpfwinklicht, (obtusangulum.) Sind aber alle drey Winkel spitzig, so ist das Dreyeck spitzwinklicht. (acutangulum.) Warum wir nicht mehr als einen rechten, und einen stumpfen, hingegen drey spitzige Winkel sagen dürfen, solle an seinem Ort erwiesen werden. Man siehet also hieraus schon, daß man aus drey gegebenen Seiten ein Dreyeck machen kann; nur müssen die Seiten so beschaffen seyn, daß allemal zwo zusammen genommen, grösser seyen als die dritte. So kann man aus den drey Linien AE, AC, und AB ein Dreyeck machen, weil $AE + AC > AB$, und $AB + AC > AE$ u. s. w. Wenn aber $AE + AC < AB$, so wäre das Dreyeck nicht möglich, und die zwo Linien AE und AC würden sich nicht ausserhalb der Linie AB schliessen oder zusammen gehen können, weil sie zu kurz sind, folglich in die Linie AB hineinfallen müßten. Eben so kann man aus zwey Linien und dem Winkel, den sie einschliessen, das Dreyeck ABC machen: dann die Seiten AB und AC und

das ungleichseitige; in Rucksicht aber auf die Winkel, das rechtwinklichte, das stumpfwinklichte, und das spitzwinklichte Dreyeck.

Aus drey Seiten wird ein Dreyeck bestimmt, wenn je zwo und zwo Seiten zusammen allemal grösser sind als die dritte.

Tab. I. fig. 2.

Tab. I. fig. 8.

Aus zwo Seiten und ei-

der Winkel BAC sind gegeben; folglich ist keine andere Linie, durch welche das Dreyeck beschlossen und vollendet würde, möglich, als die Linie BC. Endlich kann man auch ein Dreyeck aus einer Linie und den zween daran liegenden Winkeln, deren Maas zusammen aber kleiner als 180° ist, bestimmen. Denn weil die Seite AB, und die Winkel DAB und CBA gegeben sind, so können sich die verlängerte Linien AD und BC nirgend anders als in E begegnen und schliessen; wie man aus der Figur leicht ersiehet. Warum man aus drey gegebenen Winkeln, wenn sie auch alle so beschaffen sind, daß sie im Dreyeck Platz finden, doch noch kein bestimmtes Dreyeck machen könne, folglich die Aufgabe selbst unbestimmt sey, wollen wir an seinem Ort zeigen. Man muß also, ein Dreyeck zu bestimmen, drey Stücke, und unter diesen drey Stücken allemal eine Linie haben.

nem Winkel, den sie einschliessen, wird ein Dreyeck bestimmt; Tab. I. fig. 7. Aus einer Seite und zween daran liegenden Winkeln wird ein Dreyeck bestimmt.

Warum man nicht auch [illegible]ge, aus drey Winkeln wird ein Dreyeck bestimmt?

§. 144. Aus dem bisherigen ergeben sich drey wichtige und durch die ganze Mathematik sich nutzbar beweisende Grundsätze: der erste heißt:

Die hieraus fliessende wichtige Grundsätze von der Congruenz der Dreyecke, werden erkläret:

I. Wenn in zweyen Dreyecken alle drey Seiten einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das ist congruent: denn durch drey Seiten, welche so beschaffen seyn müssen, wie wir §. 143. gezeigt haben, läßt sich nur ein eini-

I. Grundsatz, wenn in zwey Dreyecken alle drey Seiten ein-

ander gleich sind.

einiges Dreyeck bestimmen. Man versuche es, und lasse sich von Holz oder Eisen drey Linien oder Seiten machen; man mag sie zusammen legen wie man will, so wird man eben immer einerley Dreyecke herausbringen.

II. Grundsatz, wenn zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel beedes in zwey Dreyecken einander gleich sind,
Tab. II. fig. 8.

II. Wenn in zwey Dreyecken zwo Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke vollkommen gleich und ähnlich, das ist congruent. Denn es ist unmöglich, daß eine grössere oder kleinere Linie als die Linie BC den Winkel BAC beschliessen könnte, wenn der Winkel selbst und die Linien AB und AC unverändert bleiben. Man darf sich nur hölzerne oder eiserne Linien und Winkel machen lassen, so wird man abermal durch einen Versuch von der Wahrheit unsers Satzes überzeugt werden.

III. Grundsatz, wenn in zwey Dreyecken eine Seite u. die zween daran liegende Winkel einander gleich sind.
Tab. II. fig. 7.

III. Wann in zweyen Dreyecken eine Seite und die zween an der Seite liegende Winkel einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das ist congruent. Die Ursache ist leicht begreifflich. Wenn die Winkel DAB und CBA nebst der Linie AB unverändert bleiben, so ist es schlechterdings unmöglich, daß sich die verlängerte Linien AD und BC an einem andern Ort als in E vereinigen und schliessen. Man kann auch dißfalls den Versuch mit hölzernen oder

eiser-

eisernen Linien machen; wenn man eine augenscheinliche Probe für die Einbildungskraft haben will.

Das sind nun die drey wichtige Grundsätze, welche in der Geometrie billig die erste Stelle verdienen. Man druckt sie auch, wie wir im vorhergehenden §. gezeigt haben, mit kürzern Worten folgendermassen aus: Ein Dreyeck wird durch drey Seiten, oder durch zwo Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder endlich durch eine Seite und zween dabey liegende Winkel vollkommen bestimmt, also, daß es nicht möglich ist, zwey verschiedene Dreyecke aus diesen gegebenen Stükken zu machen. Wenn also eines gefunden wird, das eben diese Eigenschaften hätte, so ist es mit dem andern congruent, und man darf in Absicht auf die Gleichheit und Aehnlichkeit eines für das andere setzen und substituiren. Wie ferne man bey rechtwinklichten, und in der Trigonometrie, bey allen Dreyecken überhaupt sagen könne: ein Dreyeck werde durch zwo Seiten und einen Winkel, er mag stehen wo er will, bestimmet; solle an seinem Ort vorgetragen werden. Inzwischen behält man nur die bereits erwiesene drey Grundsätze, durch welche man nun leicht verschiedene geometrische höchstwichtige Lehrsätze demonstriren kann. Die leichte Folgen, welche aber nicht ein-

Kürzerer Ausdruck der angeführten Grundsätze.

Warum man nicht hier überhaupt säge, drey Seiten, oder zwo Seiten und ein Winkel, oder eine Seite und zween Winkel bestimmen ein Dreyeck.

Warum wir die hieraus folgende praktische Aufgaben, die Weite der Oerter zu messen, u. s. f. übergehen,

einmal in der ausübenden Mathematik mehr genutzt werden, übergehen wir ganz. Z. E. die Weite zweyer Oerter, zu deren beeden, oder einem, oder gar keinem man kommen kann, auszumessen. Man befiehlt nemlich in diesem Fall, durch allerhand angenommene Stände lauter congruente Dreyecke zu machen, da dann allemal die der gesuchten Weite correspondirende Seite die Weite selbst anzeigen wird. Allein diese Aufgaben lassen sich alle kürzer, zuverläßiger und vollständiger in der Trigonometrie auflösen, wohin wir auch unsere Leser im folgenden, wann von den sogenannten Meßtischlein die Rede seyn sollte, verweisen werden.

und warum man auch im folgenden nichts von dem sogenannten Meßtischlein gedenken werde.

Daß endlich nach den gegebenen Grundsätzen ein gleichseitiges Dreyeck, wenn nur eine einige Linie gegeben ist, und ein gleichschenklichtes, wenn zwo Linien, nemlich eine Seite oder ein Schenkel und die Grundlinie gegeben sind, wirklich bestimmt werde; ist ohne unser Erinnern klar und deutlich; dahero wir auch dißfalls unsern Lesern mit solchen leichten Aufgaben nicht beschwerlich fallen wollen.

Von Bestimmung und Aufrichtung der Perpendicularlinien.

§. 145. Es giebt aber noch einige andere Folgen, welche aus diesen Grundsätzen demonstriret werden, und noch besonders anzumerken sind. Die erste ist die Kunst, eine Perpendicularlinie aufzurichten. Das kann nun auf eine zweyfache

Weise

Weise geschehen: denn es kann einem auf einer Linie ein Punkt angewiesen werden, auf welchem der Perpendikel stehen soll; man kann einem aber auch einen Punkt ausser der Linie bestimmen, von welchem man den Perpendikel auf die Linie herabziehen muß. Vom ersten Fall reden wir zuerst: man solle auf die Linie AB aus dem Punkt C einen Perpendikel CD aufrichten. Diß geschiehet leicht, wenn man nur aus C mit beliebiger Eröffnung des Zirkels auf der Linie AB zu beeden Seiten des Punkts C, die von dem Punkt C gleich weit abstehende Durchschnitte in A und B, hernach abermal von B aus in D und von A aus wieder in D den Durchschnitt D mit dem nach Belieben eröffneten Zirkel macht, aber so, daß die Oeffnung, wenn sie einmal angenommen ist, nicht geändert, folglich die Linien AD und BD gleich lang gezogen werden können. Hat man diß gethan, so ziehet man die gerade Linie DC, welche durch die zwey Punkte D und C bestimmt wird, und eine wirkliche Perpendicularlinie ist. Denn wenn die Winkel n und o zween rechte Winkel sind, so ist sie gewiß perpendicular. Das erste wollen wir nun erweisen:

Tab. I. fig. 9.

Erster Fall, wenn in der Linie ein Punkt gegeben, aus welchem der Perpendikel aufgerichtet wird.

AC

$AC = CB$; dann man hat beede Linien gleich gemacht; eben so ist auch $AD = BD$.

$CD = CD$ und endlich die dritte Linie sich selbst gleich:

$\triangle ADC \cong \triangle BDC$. folglich kraft des ersten Grundsatzes, nr. I.

Sind aber die ganze Triangel congruent oder gleich und ähnlich, so sind auch die Winkel, die gleichen Seiten entgegen stehen, einander gleich: denn wenn der eine grösser oder kleiner wäre, als der andere, so würden die Figuren selbst einander nicht decken, oder congruiren. Nun steht der Seite AD der Winkel n, und der Seite BD der Winkel o entgegen. Folglich müssen die Winkel selbst, weil die Seiten gleich sind, auch einander gleich seyn: also ist $o = n$; ist aber dieses, so sind beede Winkel rechte Winkel §. 141. Denn $o + n = 180^\circ$ §. 141.

$$\begin{array}{l} o = n \\ \hline o + o = 180 \text{ das ist,} \\ 2o = 180^\circ \\ \hline \quad : 2 \\ o = \frac{180}{2} = 90^\circ. \end{array}$$

Wo aber ein rechter Winkel ist, da steht allemal eine Linie auf der andern perpendicular; wir haben also bewiesen, was wir beweisen sollten. Uebrigens merken wir noch an, daß man wohl thut, wenn

man

man sich Mühe giebt, die Redensart, ein **Winkel stehet einer Seite, oder eine Seite stehet einem Winkel gegen über**, genau zu verstehen und sich bekannt zu machen; sie kommt nicht nur hier, sondern auch bey der Aehnlichkeit der Dreyecke mehrmalen vor. Am leichtesten wird man die Sache behalten, wenn man sagt: diejenige Seite, welche den Winkel beschließt, steht im Dreyeck dem Winkel gegen über. So beschließt die Linie AD den Winkel o, folglich steht sie ihm gegen über; eben so steht die Linie BD dem Winkel n gegen über, weil sie ihn beschließt, und die Oeffnung gleichsam zumacht. Der andere Fall von Perpendicularlinien ist, wenn einem der Punkt ausser der Linie gegeben wird. Z. E. man solle von dem Punkt D einen Perpendikel auf AB herab fällen. Hier macht man nun Durchschnitte von D aus in A und B, daß DA und DB gleich werden; ferner werden aus A und B abermal Durchschnitte entweder niederwärts in F, oder oberhalb in E gemacht; da dann durch die zwey Punkte D und E, oder D und F die Linie DC bestimmt, und zugleich eine Perpendicularlinie wird. Denn

Die Redensart, eine Seite stehet einem Winkel, und ein Winkel steht einer Seite gegen über, wird erklärt, und ist besonders zu merken.

Tab. I. Fig. 11.

Tab. I. Fig. 10.

Zweyter Fall von Errichtung der Perpendicularlinien, wenn der Punkt ausser der Linie in einer gewissen Entfernung gegeben wird.

$$\begin{array}{l} AD = DB \\ AF = FB \\ DF = DF \\ \hline \triangle DAF = \triangle DBF \end{array}$$ folglich

$o = x$ dann sie sind gleichen Seiten AF und FB entgegen gesetzt;

nun ist ferner $AD = DB$
$DC = DC$
$o = x$ folglich nach dem zweyten Grundsatz §. 144. nr. II.

$\triangle ADC = \triangle BDC$; dahero auch
$n = m$, weil sie gleichen Seiten AD u. DB entgegen stehen;

$$\begin{array}{l} n + m = 180^\circ \\ n = m \\ \hline 2n = 180^\circ \\ \hline \quad : 2 \\ n = 90^\circ \end{array}$$ also ein rechter Winkel.

Eben so wird der Beweis geführt, wenn man an dem Durchschnitt in E betrachtet; dann $AD = DB$
$AE = EB$
$DE = DE$

$\triangle ADE = \triangle BDE$ folglich
$o = x$

ferner $AD = DB$
$DC = DC$
$o = x$ folglich

$\triangle ADC = \triangle BDC$;
$m = n$. u. s. w.

Die

Die zweyte Folge aus unsern Grundsätzen ist die Kunst, eine Linie und einen Winkel in zween gleiche Theile zu theilen: dann auch bey der bereits erklärten Figur darf man nur Durchschnitte in D und F machen, und die Linie DF ziehen, so wird in C die Linie AB in zween gleiche Theile getheilet seyn. Wir haben ja umständlich bewiesen, daß unter der vorgetragenen Bedingung das Dreyeck ADC dem Dreyeck DCB gleich und congruent werde. Es ist also

Noch andere Folgen werden aus den obigen Grundsätzen hergeleitet, z. E. eine jede Linie,

$\Delta ADC = \Delta BDC$

$o = x$ folglich auch die gleichen Winkeln entgegen stehende Seiten,

$AC = CB.$

wie auch einen jeden Winkel in zween gleiche Theile zu theilen.

Der Winkel wird getheilt, wenn man CA gleich macht CB, und hernach Durchschnitte aus B und A in D macht; da dann die Linie CD den Winkel ACB in zween gleiche Winkel o und n theilet: dann

Tab. I. Fig. 11.

$CA = CB$

$AD = BD$

$CD = CD$

$\Delta ACD = \Delta BCD$ folglich

$o = n$, dann sie stehen gleichen Seiten AD u. BD entgegen.

Die dritte Folge besteht endlich darinnen, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyeckes einander gleich seyen. Man theile die Grundlinie AB in

Tab. I. Fig. 15.

zween gleiche Theile, in D, und ziehe die Linie ED; so ist

und endlich, daß die beede Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks gleich seyen.

AD = DB
DE = DE
AE = EB, weil das Dreyeck gleichschenklicht ist; folglich

ΔAED = ΔBED; und dahero die einerley Seiten entgegen stehende
o = n. Winkel einander gleich.

Eben so könnte man umgekehrt beweisen: wenn die Winkel in der Grundlinie gleich sind, so seyen die Dreyecke gleichschenklicht. Das sind nun die vornehmste Folgen aus den obigen Grundsätzen, unter welchen man vornehmlich die dritte und letzte behalten und sich bekannt machen kann.

Wir setzen noch folgenden Lehrsatz bey, der ebenfalls wohl zu merken ist. In einem jeden geradelinichten Dreyeck sind allemal zween Winkel zusammen kleiner als 180° oder als zween rechte Winkel.

Tab. I. Fig. 13. β.

Man betrachte das Dreyeck ABC, und theile die Seite AC in zween gleiche Theile in E; man ziehe die Linie BE, und verlängere sie nach F, bis EF = BE. Man ziehe die Punkten F und C zusammen, so bekommt man das Dreyeck EFC = ΔABE, weil nach der Construction AE = EC, EB = EF, und die Verticalwinkel bey E einander gleich sind. Man bezeichne die Winkel s, o, n, m, so ist der Beweis des Lehrsatzes leicht zu finden. Denn weil ΔABE = ΔEFC: so ist

s = n

$$s = n \text{ aber}$$
$$\underline{\quad n < n + m} \quad \text{also auch}$$
$$s < n + m$$
$$\underline{o = o}$$
$$s + o < o + n + m$$
$$\underline{\quad o + n + m = 780^\circ}$$
$$s + o < 180^\circ.$$

§. 146. Jetzo aber kommen wir auf einen höchstwichtigen Lehrsatz von den so- genannten Parallellinien, in so ferne sie durch eine dritte Linie durchschnitten wer- den. Wir müssen nur vorhero erklären, was Parallellinien seyen. Zwo Linien, welche auf einer dritten perpendicular auf- stehen, sind einander parallel; folglich wird sich nach der Natur der Perpendi- cularlinien keine zur andern neigen, noch auch von ihr sich entfernen. Dahero hat Euclides diejenige Linien parallel ge- nannt, welche weder convergiren noch di- vergiren; und Herr Baron von Wolf solche Linien, welche immer einerley Wei- te oder Distanz von einander behalten. Denn die Weite oder die Distanz zweyer Parallellinien ist, wie man leicht begreifft, allemal eine Perpendicularlinie, oder ei- ne Linie, mit welcher die Parallellinien beederseits rechte Winkel machen. So sind die Linien HD und IK parallel. Wenn nun diese zwo Linien durch eine dritte Li- nie DE durchschnitten werden, so sind die

Was Parallellinien seyen;

und wie ihre Distanz durch Perpendicularlinien bestimmt werde.

Tab. I. Fig. 12.

Was Wechselwinkel seyen;

Wechselwinkel (anguli alterni) x und y einander gleich. Diesen wichtigen Lehrsatz wollen wir jetzo beweisen. Man ziehe zwischen zwo gegebenen Parallellinien HD und AK die Perpendicularlinie AB, welche die Distanz beeder Linien ausdruckt, folglich auf einer wie auf der andern perpendicular stehen muß. §. 144. Man theile diese Linie in zween gleiche Theile in C; nach §. 145. hernach ziehe man durch den Theilungspunkt C die schiefe Linie ED, wie man will, wenn nur die Parallellinien dadurch beederseits durchschnitten werden; durch diese Operation werden zwey Dreyecke ECB und ACD erzeuget. Wenn sie nun beede congruent, das ist gleich und ähnlich sind, so werden die Winkel x und y einander gleich seyn. Das wollen wir jetzo beweisen.

Alle Wechselswinkel, (anguli alterni) sind einander gleich.

Beweis dieses wichtigen Lehrsatzes.

I. Wir sagen erstlich:

$r = s$. denn AB ist die Distanz der Parallellinien;

$n = o$ §. 142.

$AC=CB$. denn wir haben sie gleich gemacht; folglich

$\Delta ACD=\Delta BCE$. Darum sind auch die gleichen Seiten entgegen stehende Winkel einander gleich, das ist, weil

$AC=CB$. x der Linie AC, und y der Linie CB entgegen steht.

$x = y$.

Das

Das ist das erste, das wir beweisen wollten; es fliessen aber noch mehr Folgen aus dieser Lehre.

Zwo gleich wichtige Folgen, die aus dem erwiesenen Lehrsatz sich herleiten lassen.

II. Dann weil

$$\begin{array}{ll} & x=y \quad \text{nr. I.} \\ \text{und} & \underline{x=u} \quad \text{§. 142. so ist auch §. 9.} \\ & u=y. \end{array}$$

III. Endlich weil

$$\begin{array}{ll} & u=y \quad \text{nr. II.} \\ \text{und} & \underline{m=m \quad \text{so ist auch}} \\ & u+m=y+m; \quad \text{da aber} \\ & u+m=180^\circ, \quad \text{so ist §. 9.} \\ & y+m=180^\circ. \end{array}$$

Also sind nach dem gegebenen Beweis

I. die Wechselwinkel x und y einander gleich;

II. der Verticalwinkel von x, nemlich der Winkel u, ist gleichfalls dem untern Winkel y gleich;

III. die Summe der zween innern Winkel $m+y$ ist jedesmal 180°.

Wie nun diese Eigenschaften aus dem angenommenen Satz, daß die Linien HD und IK parallel seyen, unumstößlich bewiesen worden sind, so kann man auch wieder ohne Mühe umgekehrt beweisen, daß zwo Linien parallel seyen, wenn die Wechselswinkel x und y einander gleich seyen. u.s.w. Dieser Lehrsatz ist einer der fruchtbarsten in der Geometrie; man thut dahero wohl,

Wie man auch umgekehrt beweisen könne, daß wo die Wechselswinkel gleich sind, die Linien allemal parallel seyen.

wenn man sich selbigen vorzüglich bekannt macht. Seine Fruchtbarkeit werden wir sogleich im folgenden zeigen. In meinem mathematischen Lehrbuch habe ich den Euclideischen Beweis mit den Kästnerischen Erläuterungen vorgetragen; wo man denselben nachschlagen kann. Der hier gegebene aber ist für Anfänger etwas leichter.

Von den drey Winkeln im Dreyeck; und ob die Anzahl der Grade in allen drey Winkeln zusammen genommen bey allen Dreyecken gleich gros und unterschieden seye;

§. 147. Ein jedes Dreyeck hat drey Winkel; die Summe dieser Winkel wird sich also ausmessen lassen. Daran zweifelt man nicht. Das aber könnte man dabey noch fragen: ob alle Winkel im Dreyecke zusammen genommen, eine gleiche Anzahl von Graden haben, oder nicht; die Dreyecke selbst mögen hernach gleichseitig, gleichschenklicht, ungleichseitig, recht-stumpf-oder spitzwinklicht seyn? Und wenn das erste wäre, so könnte man wieder fragen: ob sich die Anzahl der Grade der Winkel für alle nur denkbare geradelinichte Dreyecke nicht auch bestimmen lasse? Wir wollen es versuchen, ob wir eine bestimmte Antwort hierauf geben können.

Tab. I. fig. 13.

Man nehme ein Dreyeck, was man für eines will, und mache eine Seite davon zur Grundlinie, worauf es stehen solle.

Die drey Winkel eines geradelinichten Dreyecks zusammen genommen sind

Z. E. das Dreyeck ACB, dessen Grundlinie (basis) AB ist; mit dieser Grundlinie ziehe man durch den obern Spitz C die Linie DE parallel, und bezeichne hernach alle theils schon vorhandene, theils durch die

Paral-

Parallellinie neuentstandene Winkel mit den kleinern Buchstaben des Alphabets, z. E. m, n, o, r, s. Ist dieses geschehen, so wird man folgende Gleichungen finden:

allemal 180° oder zween rechten Winkeln gleich.

$r = m$ §. 146. nr. I.
$o = o$ §. 9.
$s = n$ §. 146. nr. I. folglich §. 9.

Beweis dieses Lehrsatzes.

$r + o + s = m + o + n$. Ferner ist
$r + o + s = 180°$ §. 141. Demnach §. 9.

$m + o + n = 180°$. Da nun $m + o + n$ die drey Winkel in dem vorgegebenen Dreyecke sind, so macht ihre Summe zusammen 180 Grade; und weil der Beweis bey allen geradelinichten Dreyecken angehet, so wird die Summe aller Winkel in einem solchen Dreyeck, es mag beschaffen seyn wie es will, wenn es nur geradelinicht ist, allemal 180° machen. Wir reden nur von geradelinichten Dreyecken, denn es giebt auch krummlinichte; und von diesen werden wir zu seiner Zeit hören, daß sie ungleich mehr Grade in ihren Winkeln haben können. Uebrigens erhellet hieraus, daß kein geradelinichtes Dreyeck mehr als einen rechten Winkel habe: denn zween rechte Winkel machen schon 180°; folglich würde für den dritten Winkel nichts mehr übrig bleiben. Noch vielweniger kann ein Dreyeck mehr als einen stumpfen Winkel haben; sonst würde die Anzahl nur von 2 Winkeln schon grösser

Warum der Beweis nur auf geradelinichte Dreyecke sich anwenden lasse.

als 180° seyn. Hingegen drey spitzige sind in einem Dreyeck möglich; und wenn sie alle einander gleich sind, so ist ein jeder $\frac{180}{3} = 60°$. Folglich hält der Winkel in dem gleichseitigen Dreyeck 60°; weil sie alle drey gleich sind, das ist, weil die Winkel, die gleichen Seiten entgegen stehen, einander gleich sind. Man kann dieses letzte auch aus §. 145. eben so beweisen, wie man die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks bewiesen hat. Aus dem gegebenen Beweis für die geradelinichte Dreyecke fließt noch eine wichtige Folge. Man verlängere die Seiten eines Dreyeckes z.E. im Dreyeck ACB die Seite AC bis in D, so wird ein neuer Winkel DCB oder mit dem kürzern Ausdruck der Winkel p erzeuget werden. Und dieser Winkel p, welcher der äussere Winkel heißt, (angulus externus) wird den beeden entgegen gesetzten innern Winkeln, (angulis oppositis internis) gleich seyn. Der Beweis ist leicht, und heißt also:

Tab. I. Fig. 14.

Der äussere Winkel in einem Dreyeck ist den entgegengesetzten beeden innern Winkeln gleich.

Beweis.

$o + m + n = 180°$	Nach dem ersten Beweis.
$o + p = 180$	§. 141. folglich
$o + m + n = o + p.$	Da nun
$o = o$	so wird, wenn man beederseits subtrahirt,
$m + n = p.$	

Das

Das heißt, der äussere Winkel p ist allemal den beeden innern entgegen gesetzten Winkeln eines Dreyecks gleich.

Die Betrachtung der Winkel nach ihren verschiedenen Lagen wird fortgesetzt.

§. 148. Waren die bisherige Lehrsätze von den Dreyecken so fruchtbar als wichtig; so wird man im folgenden nicht weniger solche Sätze lesen, deren Nutzbarkeit sich in der ganzen Mathematik ausbreitet. Die Lehre von den Winkeln ist noch nicht erschöpfet. Wir haben §. 140. gezeigt, daß man einen Winkel durch einen Cirkelbogen, dessen Mittelpunkt die Spitze, und dessen Radii die beede Schenkel des Winkels sind, messen könne. Wie wäre es nun, wenn man den Bogen vollendete, und um den Winkel herum einen Cirkel beschriebe, und hernach andere Winkel in den Cirkel unter der Bedingung hineinsetzte, daß ihre Spitze an die Peripherie hinreichte, die Schenkel aber auf eben dem vorigen Cirkelbogen, welcher das Maas des ersten Winkels war, aufstünden? Wir wollen einen Versuch machen. Man siehet von selbst, daß es verschiedene Fälle gebe. Der erste und leichteste wird in der sechszehenden geometrischen Figur vorgestellt. Man hat um den Winkel BCA aus dem Punkt C den Cirkel BADB beschrieben; folglich ist der Bogen BA das Maas des Winkels BCA, oder nach einem kürzern Ausdruck des Winkels o. Die Linie AC wurde bis an die Peripherie in D

Tab. I. Fig. 16.

Was die Winkel am Mittelpunkt, (anguli ad centrum) und die Winkel an der Peripherie,

(anguli ad peripheriam) seyen.

D verlängert, und sodann von D bis B die Linie DB gezogen; da sich dann ein neuer Winkel BDA ergab, welcher auf dem vorigen Bogen aufstehet, und dessen Spitze sich gerade in der Peripherie endiget. Man heißt ihn deßwegen einen Winkel an der Peripherie (angulus ad peripheriam), wie der erstere ein Winkel am Mittelpunkt (angulus ad centrum) genannt wird. Nun hat man gefunden, daß der Winkel am Mittelpunkt gerade noch einmal so groß seye, als der Winkel an der Peripherie, der auf eben demselbigen Bogen steht. Wir wollen sehen, ob wir diesen Satz auch aus den vorgezeichneten Figuren erfinden können. Der kurz ausgedruckte Satz wird demnach der folgende seyn: $o = 2x$

Der Winkel am Mittelpunkt ist noch einmal so groß als der Winkel an der Peripherie, oder der Winkel an der Peripherie ist die Hälfte des auf gleichem Bogen stehenden Winkels am Mittelpunkt; dieser Lehrsatz wird auf drey Fälle angewandt und erwiesen. Erster Fall,

Nun müssen wir den Beweis davon geben:

$o = x + y$ §. 147. denn o kann als der äussere Winkel angesehen werden.

$x = y$ §. 145. denn der ΔCDB ist gleichschenklicht, weil DC und CB Radii sind. Wenn man nun gleiches für gleiches setzt, so ist

$o = x + x = 2x$; welches zu erweisen war. Und das ist nun der

I. Fall, da $o = 2x$.

Man

Man kann aber auch den Winkel an der Peripherie also zeichnen, wie er in der 17 Fig. aussiehet; da dann abermal gefragt wird, ob der Beweis auch auf diese Zeichnung angewendet werden könne? Wir wollen sehen, ob wir die Zeichnung nicht auf den ersten Fall reduciren können, damit der Beweis bekannter und leichter werde. Man ziehe von der Spitze D durch den Mittelpunkt C die Linie DE, so wird man die 16 Figur gleichsam doppelt neben einander gesetzt finden, und alles dahin reduciren können. Denn der Winkel ACB ist in zween Winkel o und n getheilt, deren Summe dem vorigen Winkel gleich seyn muß, weil das Ganze seinen Theilen zusammen genommen gleich ist. Folglich heißt der Winkel ACB nunmehro $o + n$, und der Winkel in der Peripherie, nemlich ADB wird aus gleichem Grunde heissen $y + x$. Wenn nun $o + n = 2y + 2x$, so haben wir die obige Eigenschaft auch von dieser Bezeichnung erwiesen. Der Beweis ist leicht:

Zweyter Fall, Tab. I. Fig. 17.

$o = 2y$ nach nr. I.
$n = 2x$ aus gleichem Grunde; folglich

$o + n = 2y + 2x$. welches der II. Fall war, den wir nun bewiesen haben.

Dritter Fall; Tab. I. Fig. 18.

Endlich kann auch die Zeichnung so aussehen, wie sie in der 18 Figur angebracht ist; da man dann abermal fragt, ob auch hier $o = 2s$? Wir versuchen eine nochmalige Reduction auf den ersten Fall, und ziehen aus der Spitze D durch den Mittelpunkt C die Linie DF; durch welche wir zween neue Winkel, nemlich n und r, und zugleich eine der ersten Zeichnung ähnliche Figur bekommen. Nun wird der Beweis sich bald geben: denn der Winkel FCB ist gleich $n + o = 2r + 2s$, wie wir erwiesen haben. Wann man nun gleiches von gleichem subtrahirt, so bleibt gleiches übrig, nemlich $o = 2s$; oder in wirklichen Gleichungen:

$n + o = 2r + 2s$

$n = 2r$, wie nr. I. erwiesen ist; wird nun dieses subtrahirt, so ist,

$o = 2s$. welches der III. Fall war, den wir erweisen sollten.

Wie die Allgemeinheit des obigen Lehrsatzes aus den drey Fällen bestimmt werde.

Nun kann man keine weitere Zeichnungen ausdenken, welche nicht mit einem von diesen drey angeführten Fällen übereinkämen; demnach wird der allgemeine Lehrsatz seine Richtigkeit haben, daß alle Winkel am Mittelpunkt noch einmal so groß seyen, als die Winkel an der Peripherie, oder daß der Winkel an der Peripherie allemal die Hälfte sey von dem Win-

Winkel am Mittelpunkt, der mit ihm auf einerley Bogen stehet.

§. 149. Aus den erwiesenen Lehrsätzen lassen sich nun wiederum verschiedene wichtige Folgen herleiten. Dann wann man das gesagte kürzlich wiederholt, und die Zeichnung noch einmal betrachtet, so wird man bald die erste Folge verstehen, welche diese ist: Alle Winkel an der Peripherie eines Cirkels sind einander gleich, wenn sie auf gleichen Bögen stehen. So ist der Winkel ANB = AMB = ADB, dann ihr gemeinschaftliches Maas ist der halbe Bogen AB, auf dem sie aufstehen; oder ein jeder ist die Hälfte von dem Winkel am Mittelpunkt, den man im Sinne bey der Figur hinzudenken kann, und dessen Maas der Bogen AB ist. Darum ist $\frac{1}{2}$ AB das Maas der Winkel ANB, AMB u. s. w. diejenigen Winkel aber, die einerley Maas haben, sind einander gleich. Also sind alle Winkel an der Peripherie, wenn sie auf einerley Bogen stehen, einander gleich.

Einige Folgen werden aus dem erwiesenen Lehrsatz hergeleitet.

Erste Folge: alle Winkel an der Peripherie, wenn sie auf gleichen Bogen stehen, sind einander gleich.

Tab. I. Fig. 20.

Die zweyte Folge ist von gleich grossem ja noch grösserem Gewichte. Sie heißt also: Ein Winkel an der Peripherie, der auf einem halben Cirkel, oder auf einem Bogen von 180° aufstehet, hat zu seinem Maas die Hälfte des Bogens, darauf er stehet, das ist, 90°; folglich ist er ein rechter Winkel. Folglich sind alle Winkel, die sich in der Peripherie endigen, und auf dem

Zweyte höchst wichtige Folge: ein Winkel an der Peripherie, der auf einem halben Cirkel aufsteht, oder auf dem Diame-

Tab. I. Fig. 21.

ter beschrieben wird, ist allemal ein rechter Winkel und hält, 90 Grade.

dem halben Cirkel oder auf dem Diameter stehen, rechte Winkel. Dieser Lehrsatz fliesset unmittelbar aus dem vorhergehenden, und breitet seinen Nutzen durch die ganze Geometrie aus. Die Winkel AEB, ADB u. s. w. sind also rechte Winkel: dann

$$AEB = \frac{ANB}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

$$ADB = \frac{ANB}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

$$AEB = ADB = 90^\circ$$

Die Aufgabe, man solle auf den Diameter eines Cirkels ein rechtwinklichtes Dreyeck, das sich in der Peripherie endige, aufrichten, ist daher eine unbestimmte Aufgabe, weilen es dergleichen unendlich viel giebt, und dieses eine Eigenschaft des Cirkels ist.

Wenn man also einem die Frage aufgiebt: wie man auf dem Diameter eines Cirkels ein rechtwinklichtes Dreyeck aufrichten könne? so ist die Frage unbestimmt: denn es lassen sich unendlich viele darinnen beschreiben. Dahero sagt man, der Cirkel seye der geometrische Ort für die rechte Winkel, und das ist nun eine besondere Eigenschaft des Cirkels. Eben so ist ohne unser Erinnern klar, daß man mit leichter Mühe eine Menge von Perpendicularlinien erfinden könne, wenn man auf dem Diameter des Cirkels solche Dreyecke aufrichtet, oder die Linien AE und EB, AD und DB u. s. w. ziehet.

Wie man eine Menge Perpendicularlinien durch diesen Lehrsatz finden, und an dem Ende der

Eine neue Folge aus den Lehrsätzen §. 148. ist endlich die Frage: ob man nicht auch einen Winkel, dessen Spitze über die Peripherie hinaus reichet, einiger massen bestimmen und schicklicher ausdruk-

drucken könne? Man beschreibe den Winkel AFB, dessen Spitze, so weit man will, über die Peripherie des Cirkels hinaus reichen, die Schenkel aber auf dem Bogen AB aufstehen sollen. Man ziehe sodann die Linie AD, so wird man zween neue Winkel o und y bekommen. Folglich wird sich eine Rechnung ergeben, wenn man sagt:

Linien aufrichten könne. Tab. I. Fig. 19. Letzte Folge, ob u. wie man den Winkel, dessen Spitze über die Peripherie hinausreichet, bestimmen könne.

$$o = \frac{AB}{2} \quad §. 148.$$

$$o = x + y. \quad §. 147.$$

$$x + y = \frac{AB}{2}$$

$$y = \frac{ED}{2} \quad §. 148. \text{ subtrahirt;}$$

$$x = \frac{AB - DE}{2.}$$ oder wenn man gleiches für gleiches setzt,

$$x = \frac{o - y}{2}$$

Demnach ist der Winkel AFB, oder kürzer, der Winkel x die halbe Differenz zwischen den Winkeln o und y; das ist, wenn man ED das Maas des Winkels y von AB dem Maas des Winkels o subtrahirt, und den Rest halbirt, so hat man das Maas des Winkels x, welcher über die Peripherie hinaus reichet.

§. 150. Bisher haben wir die Winkel im Cirkel ohne Sehnen betrachtet, nun wollen wir auch sehen, was wir für Eigenschaften finden, wenn wir die Schenkel der

Betrachtung der Winkel im Cirkel in Absicht auf ihre Sehnen.

Winkel nicht nur durch Bögen, sondern auch durch die Sehnen der Bögen beschliessen. Es seye der Cirkel ADEB gegeben; sein Mittelpunkt seye C; in C wollen wir den Winkel ACB oder n sich endigen lassen, und seine Schenkel AC und CB mit der Sehne AB schliessen. Nun wollen wir auf einer andern beliebigen Seite des Cirkels einen gleich grossen Bogen DE abschneiden, und auch seine Sehne ziehen, sodann selbige durch die Radios DC und EC mit dem Mittelpunkt verbinden. Nun frägt man: ob die Sehnen gleich seyen, wenn die Bogen gleich sind? Wir sagen ja, und wollen unsere Antwort jetzo beweisen.

Tab. I. fig. 22.

Wenn die Cirkelbögen gleich sind, so sind auch die Sehnen gleich,

Der Bogen DE = dem Bogen AB, folglich
o = n §. 147. ferner
DC = CA
EC = CB dann es sind lauter Radii;
———————— demnach, §. 144.
△DCE = △ACB und dahero auch
DE = AB; weil diese zwo Seiten gleichen Winkeln entgegen stehen.

und wenn die Sehnen gleich sind, so sind auch die Bögen gleich; folglich auch die Winkel,

Hieraus erhellet, daß die Sehnen gleicher Bogen einander gleich seyen; und eben so läßt sich beweisen, daß die Bogen gleich seyn müssen, wenn die Sehnen gleich sind. Denn wenn

DE = AB
DC = CA
EC = CB so ist

$\triangle$DCE = $\triangle$ACB. Folglich
o = n und dahero auch
der Bogen DE = dem Bogen AB.

welche durch die Bogen gemessen werden.

§. 151. Wir halten uns nur noch eine kurze Zeit bey den Sehnen auf, und versuchen jetzo, was heraus kommt, wenn wir eine Sehne ziehen, und selbige durch eine Perpendicularlinie in zween gleiche Theile zertheilen; wird wol die Perpendicularlinie, wenn sie verlängert wird, durch den Mittelpunkt des Cirkels gehen, und folglich den Cirkel selbst in zween gleiche Theile schneiden? Es sey die Sehne AB, die Perpendicularlinie, welche die Sehne in G in zween gleiche Theile theilet, DG; nun verlängere man sie bis in F, und ziehe zu beeden Seiten die Sehnen DA, AE, DB und BE. Wenn DA = DB und AE = BE, so sind auch die Bogen DA und DB, ferner die Bogen AE und BE einander gleich; folglich geht die verlängerte Linie DE durch den Mittelpunkt. Das erstere wollen wir beweisen; da sich dann das letztere von selbst geben wird.

Ob die Perpendicularlinie, welche eine Sehne in zween gleiche Theile theilet, durch den Mittelpunkt des Cirkels gehe, und den ganzen Cirkel in 2 gleiche Theile theile, wenn sie verlängert wird?

Tab. II. fig. 23.

Bejahung dieser Frage samt dem Beweis;

AG = GB, weil die Linie in 2 gleiche Theile
GD = GD getheilt wird.
AGD = DGB sind rechte Winkel; folglich

$\triangle$AGD = $\triangle$AGD und dahero auch
AD = BD, weil sie gleichen Winkeln
entgegen stehen.

Ferner

$AG = GB$

$GE = GE$

$AGE = BGE$ sind rechte Winkel, folglich

$\Delta AGE = \Delta BGE$; dahero auch

$AE = BE$, weil sie gleichen Seiten entgegen stehen.

Wir haben also bewiesen, daß

$AD = DB$

$AE = BE$, folglich §. 9.

$AD + AE = DB + BE$, also auch die Bögen

$DAE = DBE$. §. 150. Da nun

$DAE + DBE =$ der ganzen Peripherie $= 360°$,

und $DAE = DBE$; so wird, wenn gleiches für gleiches gesetzt wird,

$2\,DAE = 360°$

: 2

$DAE = 180°$ oder dem halben Cirkel.

Eben so ist auch DBE der halbe Cirkel; folglich theilet die Linie DE den ganzen Cirkel in zween gleiche Theile; ist aber dieses, so ist sie der Diameter, und gehet durch den Mittelpunkt. Wenn man nun an zween Orten, solche Sehnen, z. E. AB und BE ziehet, und sie in zween gleiche Theile durch Perpendicularlinien theilet, so werden sie beede, nemlich GH und IK, durch den Mittelpunkt gehen, und folglich, weil der Cirkel nur einen einigen Mittelpunkt hat, an dem Ort, wo sie einander durchschneiden, nemlich in C ihn bestimmen. Man siehet hieraus, daß man aus drey gege-

Tab. II. fig. 24.

und wie dadurch, wenn man die Operation mit zwo verschiedenen Sehnen mache, der Mittelpunkt des Cirkels be-

gegebenen Punkten, wenn sie anders nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel bestimmen kann. Denn die Punkte seyen A, B, und E, nun ziehe man die Linien AB und BE, und theile sie durch Durchschnitte in G und E, wie auch in I und K, welche schon die Perpendicularlinie §. 145. bestimmen, in zween gleiche Theile; so werden die gezogene Linien GH und IK, den Mittelpunkt C, und die aus dem Mittelpunkt C nach A einem der gegebenen Punkte gezogene Linie CA oder den Radius bestimmen; wenn man aber den Mittelpunkt und den Radius hat, so hat man den ganzen Cirkel, dessen Peripherie hernach durch die drey Punkte A, B und E gehen wird.

stimmt und gefunden werde,

auch wie man aus drey gegebenen Punkten, wenn sie nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel bestimmen könne?

§. 152. Doch genug von diesem; wir handeln jetzo eine wichtige Materie ab, in Rucksicht auf die Vierecke. Man fragt billig: ob man nicht wie bey den Dreyecken, also auch bey den Vierecken, oder bey solchen Figuren, die in vier gerade Linien eingeschlossen seyen, die Anzahl der Winkel bestimmen könne? Bey dem Dreyeck machen sie 180°; wie viel machen sie wol zusammen bey dem Viereck aus? Wir werden diese Frage durch die Reduction beantworten können, wenn wir nun wissen, was Diagonallinien seyen. Wenn in einem Viereck, oder überhaupt in einem Vieleck, von einem Eck zum andern eine

Von den Vierecken;

ob man nicht wie im Dreyeck, also auch im Viereck, die Anzahl aller Winkel bestimmen könne,

und wie man zu dem Ende wissen müsse, was Diagonallinien seyen.

Tab. II fig. 25. 26.

Linie gezogen wird, so heißt man sie die Diagonallinie. So sind die beede Linien DB in den beeden Vierecken ABCD die Diagonallinien. Nun sieht man schon, daß ein jedes Viereck durch die Diagonallinien in zwey Dreyecke getheilt werde; da nun die Summe der Winkel in einem Dreyeck 180° macht, so wird sie in zweyen 2. 180° = 360° machen. Folglich ist die Summe aller Winkel in einem geradelinichten Viereck, es mag hernach aussehen wie es will, und regulair oder irregulair seyn, 360°. Nun giebt es regulaire und irregulaire Vierecke: ein regulaires Viereck entstehet, wenn entweder alle vier Seiten und Winkel einander gleich sind, da es dann ein Quadrat heißt; oder wenn alle vier Winkel und je zwo und zwo parallele Seiten einander gleich sind, in welchem Fall es ein längliches Rectangulum genannt wird; oder wenn zwar alle vier Seiten, aber nur je zween und zween Winkel, einander gleich sind, wodurch ein Rhombus entsteht; oder endlich, wenn nur zween Winkel und zwo Seiten allemal einander gleichen, da dann ein Rhomboides heraus kommt. Alle diese Gattungen von Vierecken werden mit einem Namen Parallelogramma genannt; und diese Vierecke theilet nun die Diagonallinie in zween gleiche Theile. Das wollen wir beweisen. Die 25. Fig. stellet einen Rhombus vor;

Die Summe aller Winkel im Viereck ist 360°.

Eintheilung der Vierecke, in Quadrate, Rectangula Rhombos und Rhomboides, welche mit einem Namen Parallelogramma heissen.

DB

DB ist die Diagonallinie. Nun ist nach den gegebenen Erklärungen

Tab. II. fig. 25.

$$\begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \\ DB = DB. \\ \hline \triangle ADB = \triangle DBC. \end{array}$$

Die Diagonallinien theilen alle Parallelogramma in zween vollkommen gleiche Theile.

Eben so beweißt man diesen Satz bey den Quadraten, länglichten Vierecken, und Rhomboiden. Wir wollen dahero unsere Leser nicht ohne Noth damit aufhalten; das aber müssen wir noch erinnern, daß man diesen nun bewiesenen Satz sich wohl einprägen solle; wir werden ihn in der Lehre von dem Flächenmaas oder in der Planimetrie mit grossem Nutzen gebrauchen können. So viel dürfen wir vorläufig schon sagen, und unsere Leser werden es auch verstehen, daß alle nur mögliche geradelinichte Dreyecke verdoppelt, und durch diese Verdopplung in ein regulaires Viereck, nemlich entweder in ein Quadrat, oder Rectangulum, oder Rhombus oder Rhomboides verwandelt werden können. Uebrigens haben wir den Namen eines regulairen Vierecks allen diesen Gattungen mit Fleiß gegeben: denn ohnerachtet das Quadrat das regulaireste ist, und man sonsten die regulaire Vierecke durch solche Figuren erklärt, welche lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, so glaubten wir doch, wir könnten bey dem Viereck eine Ausnahme machen; weil die benamßte

Und ein jedes geradelinichtes Dreyeck kann durch die Verdopplung in ein Parallelogramm verwandelt werden.

namßte Gattungen in der That viel regulaires haben, und ein Anfänger die Sache besser fasset, wenn man verschiedene Dinge, die vieles mit einander gemein haben, unter eine Hauptgattung bringet. Was aber die andere Vielecke betrifft, so behalten wir die gewöhnliche Eintheilung und Erklärung bey. Um nun wieder auf die Vierecke zu kommen, so wird der Winkel im Quadrat und länglichten Rectangulo allemal ein rechter Winkel seyn. Denn die Summe aller Winkel im Viereck macht 360°; im Quadrat und Rectangulo sind alle vier Winkel einander gleich, nach der gegebenen Erklärung; folglich ist ein jeder $= \frac{360}{4} = 90°$, das ist ein rechter Winkel. Wenn in dem Rhombus oder Rhomboides ein Winkel gegeben ist, so wird man die übrigen leicht finden können. Denn es seye ein Winkel 30°, so wird der gegenüberstehende auch 30°, folglich zween 60° seyn; da nun alle vier zusammen 360° machen, so werden die zween übrige 300°, folglich weil beede gleich sind, einer 150° halten. Alle Vierecke, welche zu den bisher benamßten Gattungen nicht gehören, sind irregulair; sie werden auch mit einem besondern Namen Trapezia genannt. Dergleichen eines in der 26. Fig. vorgestellet wird.

Der Winkel im Quadrat und Rectangulo ist allemal ein rechter.

Von denen Winkeln des Rhombus und Rhomboides.

Was die Trapezia seyen.

§. 153. Nach den Vierecken kommen die übrige Vielecke vor; nemlich Fünfecke,

Sechs-

Sechsecke, Siebenecke u. s. w. welche mit einem allgemeinen Namen Vielecke genannt werden. Sie sind entweder regulair oder irregulair: jene bestehen aus lauter gleichen Seiten und Winkeln; diese aber nicht. Beede werden durch Diagonallinien in so viel Dreyecke getheilt, als sie Seiten haben, weniger zwey; z. E. ein Viereck hat vier Seiten, und kann in zwey Dreyecke, das ist 4 — 2 getheilt werden; ein Fünfeck hat fünf Seiten, und kann in drey Dreyecke, das ist 5 — 2 getheilt werden; ein Sechseck hat sechs Seiten, und kann in 4 Dreyecke, das ist 6 — 2 durch die Diagonallinien getheilt werden u. s. w. wie man durch eine Induction bald zeigen kann. Wenn also die Anzahl der Seiten n ist, so werden die Dreyecke, darein die Figur getheilt wird, n — 2 seyn; folglich siehet man abermal, wie man auch hier die Summe aller Winkel leicht finden könne: sie ist nemlich allemal (n — 2). 180. Fragt man, wie viel Diagonallinien gezogen werden können, so wird man auch durch die Induction es leicht ausmachen, daß in einem Viereck eine, im Fünfecke zwey, im Sechsecke drey u. s. w. folglich drey weniger, als das Vieleck Seiten hat, gezogen werden können. Wenn also die Anzahl der Seiten n ist, so ist die Summe aller Diagonallinien, die sich aber nicht durchkreutzen dürfen = n — 3. Nun kann

Alle Figuren welche mehr als vier Ecke haben, heissen mit einem allgemeinen Namen Vielecke oder Polygone.

Alle Vielecke lassen sich durch die Diagonallinien in so viel Dreyecke theilen, als sie Seiten haben, weniger zwey;

folglich kann man auch leicht die Summe aller Winkel im Vieleck finden.

Wie viel sich Diagonallinien, welche einander nicht durchkreutzen, in jedem Vieleck ziehen lassen.

Wie man die Seite und Winkel eines regulairen Vielecks finden könne;

kann man billig fragen: wie man die Seite eines regulairen Vielecks finde? Es sind nun zwey, nemlich das Viereck und das Sechseck, das sich durch den Cirkel und Lineal, ohne algebraische Rechnungen, bestimmen lassen.

und was ein regulaires Vieleck seye.

Ein regulaires Vieleck hat lauter gleiche Winkel, und zwar so viel Winkel als es Seiten hat; da nun die Summe aller Winkel $(n-2).180$ ist, so wird der Winkel des regulairen Vielecks allemal seyn $\frac{(n-2)180}{n}$. Wenn also $n=6$; so ist der Winkel des Sechseckes $\frac{(6-2)180}{6} = \frac{4.180}{6} = \frac{2.180}{3} = \frac{360}{3} = 120$.

Das regulaire Sechseck läßt sich geometrisch leicht bestimmen.

Wenn ich nun einen Cirkel beschreibe, und den Radius zur Sehne mache, hernach aus dem Mittelpunkt C an die beeden Ende der Sehne wiederum Radios ziehe; sodann an die erste Sehne hin den Radius noch einmal als eine Sehne im Cirkel auftrage, und die vorige Operation fortsetze: so bekomme ich gerade den Polygonwinkel $2.60 = 120$. Dann die beede Dreyecke sind gleichseitig, weil ihre Seiten lauter Radii sind, folglich haben sie auch drey gleiche Winkel; demnach ist ein jeder der dritte Theil von $180°$ der Summe der Winkel, das ist $\frac{180}{3}° = 60$. Dieser Winkel wird im Sechseck verdoppelt; folglich wird ein regulaires Sechseck beschrieben, wenn man den Radius sechsmal in der

Peri-

Peripherie eines Cirkels herumträgt. Weil man nun aus dem Mittelpunkt an alle Ecke des Vielecks oder Polygons Linien ziehen kann; so werden dadurch nicht nur so viel Dreyecke, als es Seiten hat, sondern auch so viel gleiche Winkel am Mittelpunkt entstehen. Da nun die Summe aller Winkel an dem Mittelpunkt herum zusammen genommen 360° ; so wird ein Winkel an dem Mittelpunkt, wenn die Anzahl der Seiten n heisset, seyn $\frac{360}{n}$; folglich im Sechsecke $\frac{360}{6} = 60$. Man siehet also, daß man aus der gegebenen Anzahl der Seiten den Polygonwinkel und den Winkel am Mittelpunkt finden kann. Wird demnach die Seite wirklich gegeben, so läßt sich allemal ein Vieleck entweder geometrisch oder doch mechanisch beschreiben.

Wie sich ein jedes Vieleck mechanisch bestimmen lasse;

Dieses gehört nun zur ausübenden Mathematik; in der Civil- und besonders in der Militarbaukunst, bey Vestungsgebäuden, hat die Lehre von den Polygonen ihren Nutzen.

In welchem Theil der ausübenden Mathematik die Lehre von den Polygonen vorzüglich zu wissen nöthig seye.

Wir lassen uns aber in das praktische nicht ein. Das regulaireste Viereck, nemlich das Quadrat, läßt sich auch geometrisch in den Cirkel einschreiben: denn man richtet nur auf dem Diameter zu beeden Seiten zwey gleichschenklichte Dreyecke auf, deren Spitzen an die Peripherie stosen, so werden sie zusammen ein völliges Quadrat ausmachen. Denn die

Wie man ein Quadrat geometrisch bestimmen und in den Cirkel einschreiben, das ist, seine Seite finden könne.

die Winkel an der Peripherie sind rechte Winkel. §. 147. Folglich müssen die andere zween auch rechte seyn: dann die Hälfte von jedem ist 45°, weil die Dreyecke gleichschenklicht sind; demnach sind die Winkel selbst 90° groß. Eben so ist klar, daß alle vier Seiten gleich seyn müssen, weil die beede Dreyecke gleichschenklicht, und eines so groß als das andere ist. Durch Hülfe der Buchstabenrechnung kann man noch andere Vielecke finden, welche hernach geometrisch bestimmt werden können. Wir wollen auch einige Exempel im folgenden geben; ohnerachtet man in der Ausübung sich nicht viel darnach richtet, sondern gemeiniglich die Aufgabe mechanisch durch Hülfe der verschiedenen Instrumente auflößt. Dahero die hier je und je vorkommende algebraische Exempel mehr den Witz zu schärfen vorgetragen werden, als daß sie sonsten besonders brauchbar wären. Es giebt aber ohne diese noch andere, und weit schönere Exempel, welche die Scharfsinnigkeit üben, wie wir im folgenden sehen werden; dahero wir dißfalls uns kürzer ausdrücken dürfen: dann man siehet leicht, daß in der Buchstabenrechnung eine solche Menge von Exempeln möglich seye, deren Summe sich kaum bestimmen liesse. Wollte man nun so viele Exempel vortragen, so müßte man sich in die größte Weitläufftigkeit einlassen. Diß aber ist

Vorläuffige Anzeige, wie sich auch andere Vielecke algebraisch bestimmen lassen.

unserm gegenwärtigen Vorhaben nicht gemäß.

§. 154. Wir haben alles vorgetragen, was in dem Längenmaas zu wissen nöthig ist; der Weg zum Flächenmaas oder zur Planimetrie ist also nunmehro gebahnet. Die Fläche einer Figur wird betrachtet, in so ferne sie eine Länge und Breite aber keine Dicke hat; was demnach blos in die Länge und Breite ausgedehnt ist, das heißt man eine Fläche: nun kann ich eine Fläche nicht anders als wiederum mit einer Fläche ausmessen. Die Frage ist also nur diese: was ich für eine Fläche zum Maas annehmen soll, ob sie rund, oder viereckicht, oder dreyeckicht u. s. w. seyn solle? Die Antwort wird wol diese seyn: man solle diejenige Fläche wählen, welche die schicklichste ist. Nun werden wir bald erfahren, daß die viereckichte Fläche, welche gleich lang und breit ist, das ist ein Quadrat, am dienlichsten sey, alle andere Flächen auszumessen, und daß der einem natürlicher Weise einfallende Gedanke, wie man dann mit einem vollkommenen Viereck, wenn es auch noch so klein wäre, in die Spitze der Dreyecke hinein kommen, und selbige ausmessen könne, durch den Weg der Reduction von selbst sich werde heben lassen. Wir nehmen also zum Maas aller nur denkbaren Flächen ein Quadrat oder eine viereckichte Fläche, die rechtwinklicht und

Vorbereitung zum Flächenmaas oder zur Planimetrie.

Flächen werden wiederum durch Flächen ausgemessen.

Was man für eine Fläche zum Maas annehmen solle,

und wie die viereckichte, und unter diesen das Quadrat, die schicklichste seye, und zum Maas aller möglichen Flächen gebraucht werden könne.

Ob man dann mit einem Viereck die in spitzige Flächen sich verlierende

Dreyecke u. s. w. auch ausmessen könne, und wie man sich dißfalls durch die Reduction oder Verwandlung einer Fläche in eine andere helfe.

und gleich lang und breit ist, dergleichen in der 27 Fig. neune angebracht sind, und sehen, weil man mit den leichtesten und gewissesten Exempeln den Anfang machen muß, wie oft sich ein solches Viereck in einem andern rechtwinklichten Viereck herum legen lasse. Wenn man z. E. von Papier eine Fläche so groß als ABCD in der Fig. 28. ausschneidet, und hernach eine kleinere auch von Papier ausgeschnittene Adef zum Maas annimmt, so legt man die kleinere in der grössern so oft herum, als man kann, und merkt sich hernach die Zahl, wie oft man die kleinere Fläche in der grössern herum gelegt habe; da dann der Innhalt der Fläche selbst, z. E. in der vorgegebenen Fläche durch 15 kleinere und zum Maas angenommene Flächen, bestimmet wird. Nun begreifft man leicht, daß wir dieses Maas kürzer finden können. Denn wenn ich die Figur ansehe, so finde ich, daß durch diese fünfzehenmalige Umlegung der kleinern Fläche die Grundlinie AD in fünf, und die Höhe AB in drey gleiche Theile getheilt werde, weil die kleinere Fläche sich selbst überall gleich bleibt. Ich würde also, wenn ich die Grundlinie oder die Breite = 5′ mit der Höhe = 3′ multiplicire, auf einem kürzern Weg eben so viel gefunden haben, als wenn ich meine zum Maas angenommene Fläche wirklich 15mal herum gelegt hätte. Eben so finde ich

Tab. II. Fig. 28.

Wie man eine rechtwinklichte Fläche, das ist ein Quadrat oder ein Rectangulum, wirklich ausmesse.

und wie man das Maas kürzer und schneller finden könne, nemlich durch die Multiplication der Grundlinie in die Höhe, oder im Quadrat, durch die Multiplication der Grundlinie mit sich selbst.

ich in der 27. Fig. wenn die Breite und Höhe gleich ist, das ist, wenn AB = AD, einerley Innhalt, ich mag die angenommene Fläche z. E. in der vorgegebenen Figur neunmal wirklich herum legen, oder blos die Grundlinie AD = AB = 3, mit sich selbst multipliciren; dann weil die Höhe und Breite einerley ist, so ist AD. AB = AD.AD = AD^2 = 3.3 = 3^2 = 9. Man wird dahero am besten thun, wenn man bey einem vorgegebenen rechtwinklichten Viereck die Breite mit der Höhe, und wenn die Höhe der Breite gleich ist, die Breite mit sich selbst multiplicirt; das Product muß allemal der gesuchte Innhalt der Fläche seyn. Wenn also die Breite 5′ und die Höhe 3′ beedes nach dem Längenmaas hält, so wird der Innhalt des ganzen Vierecks nach dem Flächenmaas seyn 15′; von welchen 15′ ein jeder Flächenschuh einen Schuh lang und einen Schuh breit ist. Weil nun im Längenmaas ein Schuh 10″ hält, so wird ein Schuh im Flächenmaas 10 . 10″ = 100″ halten. Dann weil die Breite und Höhe gleich ist, oder weil die Breite 10″ und die Höhe 10″ beträgt, so darf ich nur 10 mit 10 multipliciren, da dann das Product 100″ einen Schuh im Flächenmaas geben wird. Ein solcher Schuh heißt ein Quadratschuh, weil alle rechtwinklichte Vierecke, die gleich lang und breit sind, Quadrate heis-

Tab. II. fig. 27.

Aus dem bisherigen wird erwiesen und gezeigt, wie groß ein Schuh im Flächenmaas seyn müsse u. s. w. nemlich ein Quadratschuh hält 100 Quadr. Zoll; eine Quadratruthe 100 Quadratschuhe u. s. w.

heissen. Da nun eine geometrische Ruthe 10′ lang ist, so wird auch eine Quadratruthe 10 . 10′ das ist, 100 Quadratschuhe in sich halten; auf gleiche Weise findet man, daß ein Quadratzoll, der 10‴ lang und breit ist, 100 Quadratlinien in sich begreifft. Demnach gehet das Flächenmaas von hundert zu hundert; und wie z. E. im Längenmaas 10 Zoll einen Schuh, 10 Schuh eine Ruthe geben, so machen im Flächen- oder Quadratmaas erst 100 Quadratzoll einen Quadratschuh, und 100 Quadratschuhe eine Quadratruthe aus. Dahero muß man allemal je zwo und zwo Zahlen für die Quadratlinien, Zolle und Schuhe abschneiden; z. E. 2486759‴ sind 2° 48′ 67″ 59‴, das ist, 2 Ruthen, 48 Schuhe, 67 Zoll, 59 Linien im Quadrat. Die Sache ist leicht begreifflich. So oft ich von einer niedern Gattung meines Maases 100 habe, so oft bekomme ich eine Einheit für die unmittelbar folgende Gattung entweder der Schuhe, oder Ruthen u. s. w. Z. E. 124′ im Quadratmaas sind eine Ruthe und 24 Schuhe; weil 100 Schuhe eine Ruthe ausmachen, folglich 100′ + 24′ = 1° 24′. Ich denke, ich habe mich jezo deutlich genug ausgedruckt. Im gemeinen Leben und in der Ausübung geht man vom geometrischen Maas hie und da ab, wie wir schon gezeigt haben. Bey uns

welches aus der Decimalprogression im Längenmaas erhellet,

dahero man im Quadratmaas, das von 100 zu 100 gehet, allemal je zwo Zahlen für die Zolle, Schuhe u. s. w. abschneidet;

Wie viel Zoll auf einen Schuh, und wie viel Schuhe auf eine Ruthe von den Feldmessern in unserm Lande gerechnet werden:

uns hält im Längenmaas eine Ruthe 16′ folglich eine Quadratruthe 16.16′ = 256′; ein Schuh hält im Längenmaas 12 Zoll, folglich ein Quadratschuh 12 . 12 = 144″ u. s. w. Die Geometrie bleibt bey ihrer Progression von 10 zu 10, und im Quadratmaas von 100 zu 100, wie im Cubicmaas von 1000 zu 1000: wer aber die Feldmeßkunst dazu lernen und ausüben will, der muß sich erkundigen, was man in demjenigen Land, wo er sein Brod damit verdienen will, für ein Maas habe; in welchem Fall er hernach bald fortkommen wird. Damit aber geben wir uns, nach unserm schon mehrmalen angezeigten Vorhaben, gar nicht ab. Unsere Leser werden dahero auch keine weitere Nachrichten von dem Feldmessen u. s. w. von uns erwarten. Uns genüget, daß wir gezeigt haben, wie man überhaupt eine Fläche ausmesse, und wie man ein beliebiges Viereck, wenn es nur rechtwinklicht und gleich lang und hoch ist, dazu wählen dürfe, es mag hernach die Länge des Schuhes nach dem Arm oder nach dem Fuß eines Mannes oder eines Kindes u. s. w. angenommen werden. Nur muß man, wenn das Maas einmal angenommen und festgesetzt worden ist, in der ganzen Rechnung beständig dabey bleiben.

und wie in der Ausübung dißfalls keine allgemeine Uebereinstimmung sich finde, folglich man eben sich nach den Gewohnheiten eines jeden Landes richten müsse.

§. 155. Die nächste Frage meiner Leser wird jetzo wol diese seyn, wie man es

Wie man schiefe Parallelogramma auf rechtwinklichte reduciren und ausmessen solle.

mache, wenn man schiefliegende Figuren, und zwar erstlich Vierecke, die keine rechte, sondern stumpfe, oder spitzige Winkel haben, auszumessen hätte, dann aus dem bisherigen versteht man noch nicht, wie man in diesem Fall zu Werke gehen solle. Wir wollen zuerst einen Rhombus oder Rhomboides betrachten. Ich solle ihn durch ein rechtwinklichtes Viereck ausmessen. Das aber läßt sich nicht thun, daß ich ihn durch die Reduction in ein rechtwinklichtes Viereck verwandle, welches von einerley Grösse ist. Nun will ich einen Versuch wagen, ob etwa diese Verwandlung angeht. Die auszumessende Figur seye der Rhomboides ADFG; Ich sehe wohl, daß ich mit meinem rechtwinklichten Viereck, in der 27. und 28. Figur, durch das Herumlegen derselben, bey den spitzigen und stumpfen Winkeln in F und G nicht wohl zukommen kann, und doch möchte ich gern das Maas so genau wissen, als es möglich ist. Ich versuche dahero die Verwandlungskunst. Wenn ich die Figur ADFG in die Figur ABCG also verwandeln kann, daß ABCG ein rechtwinklichtes Viereck und der vorigen Figur vollkommen gleich ist, so werde ich aufs genaueste ausmessen können. Man mache also einen Versuch, und verlängere die Linie DF, welche mit AG, kraft der Natur des Rhomboides parallel ist, bis in B; hernach

Versuch, ob die Verwandlung angehe;

Tab. II. Fig. 19.

und was man, die Bedingung des Versuchs zu vollenden, für Linien ziehen müsse.

hernach richte man auf AG ein rechtwinklichtes Viereck auf, dessen Grundlinie AG und dessen Höhe die Distanz der beeden Parallellinien, folglich die Perpendicularlinie CG oder AB ist; so wird ABCG ein rechtwinklichtes Viereck seyn, dessen Innhalt AG . AB ist. §. 154. Nun wollen wir sehen, ob es dem Rhomboides ADFG gleich ist; dann in diesem Fall hätten wir seinen Innhalt hernach schon gefunden. Man betrachte die zwey Dreyecke BAD und CGF, welche wie ein lateinisches W gleichsam in einander stecken; so wird man bald sehen, daß sie einander gleich und ähnlich seyen. Hat man das gefunden, so subtrahire man beederseits das Stück CED, und addire wieder beederseits das Stück AEG; da sich dann ergeben wird, daß ABCG = ADFG. Wir wollen den Beweis hersetzen. Zuerst beweisen wir, daß die Linie BD gleich seye der Linie CF: dann

Beweis, daß die Verwandlung vollkommen angehe.

$$\begin{array}{l} BC=AG \\ DF=AG \\ \hline BC=DF \\ CD=CD \\ \hline BC+CD=CD+DE \end{array}$$

weil es Parallellinien sind, folglich

das ist

$BD = DF$.

Jetzo können wir erst beweisen, daß die beede Dreyecke BAD und CGF einander gleich seyn. Dann, wie wir bewiesen haben, so ist

BD=CF, ferner §. 152.
BA=CG
DA=FG folglich §. 144. nr. I.

△BAD=△CGF ferner §. 9.
△CED=△CED subtrahirt:

△BAD—△CED=△CGF—△CED, das ist, wenn man die Figur ansieht:

BAEG = DEGF. Nun ist;
△AEG=△AEG dieses addirt, giebt

BAEC + △AEG=DEGF + △AEG; d. i. wenn man die Figur ansieht:
ABCG = ADFG. welches zu erweisen wär.

Wie man den Beweis der Phantasie deutlich machen könne.

Wenn es einem ungewohnt ist, bald ein Stück hinweg, bald wieder hinzu zu denken oder zu setzen, so darf er nur so zwo Figuren von Pappendeckel oder Chartenpapier ausschneiden, und selbige in der Ordnung, wie die Figur aufweiset, auf einander legen, so wird er den Beweis seiner Phantasie so klar machen, als es möglich ist. Der Lehrsatz selbst ist von grossem Gewichte, und wird in Worten also ausgedruckt: **Zwey Parallelogramma, welche einerley Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich.** Wir sagen **gleich**, nicht aber, ähnlich. Unsere Leser werden dahero an die Sätze von der Gleichheit und Aehnlichkeit in die Einleitung §. 10. zurück denken. Denn ein anders ist congruent oder beedes gleich und ähnlich, ein anders hingegen allein **gleich**.

Allgemeine und höchstfruchtbare Hauptregel, daß alle Parallelogramma von einerley Grundlinien und Höhen einander gleich seyen;

und wie man hie die Gleichheit, Aehnlichkeit und Congru-

gleich, nicht aber auch ähnlich seyn. Ferner werden sie verstehen, was wir durch die Höhe anzeigen; nemlich eine Perpendicularlinie, welche zwischen denen beeden Parallellinien, worein die Figuren fallen, oder welche von dem Ende einer Figur auf ihre Grundlinie herabgezogen wird. So ist z.E. die Höhe eines mit Fleiß schief gebauten Thurms, dergleichen einer zu Bononien seyn solle, nicht die Schiefe, sondern die senkrechte Linie, die von der Spitze auf die Erde perpendicular herabgefället wird. Eben so ist auch die Höhe des Dreyecks ACB nicht CB oder AC, sondern die Perpendicularlinie CD: dann so weit stehet seine Spitze C von der Grundlinie AB, welche bis D verlängert würde, ab.

enz wohl unterscheiden müsse;

was man durch die Höhe einer Figur verstehe, wird umständlich erklärt.

Tab. II. Fig. 30.

Dem bisher gegebenen Beweis von Verwandlung der Parallelogrammen wollen wir noch einen beyfügen, woraus man lernt, daß ein jedes Quadrat in ein Rectangulum und umgekehrt verwandelt werden kann. Man verlängere von dem gegebenen Quadrat FIDE die Seite DE, bis DC der Höhe des Rectanguli gleich ist, in welches man es verwandeln will; man ziehe von C durch I die Linie CG, welche die verlängerte FE in G schneidet; man mache das Dreyeck AGC dem Dreyeck EGC gleich; so wird ABIH = IDEF: dann es ist

Tab. I. fig. 22. β.

 ΔEGC

$$\triangle EGC = \triangle AGC$$
$$\triangle GIF = \triangle GHI. \quad \text{subtr.}$$
$$\triangle EGC - \triangle GIF = \triangle AGC - \triangle GHI$$ d. i. in der Figur
$$FICE = ACIH.$$ weil ferner
$$\triangle BIC = \triangle DCI;$$ diese subtr. lassen
$$FICE - BIC = ACIH - DCI,$$ das ist in der Fig.
$$FIDE = ABIH.$$

Wenn also in einem Parallelogramm die Diagonallinie gezogen, und in selbiger nach Belieben ein Punkt, wie I angenommen wird, durch welchen man mit der Seite des Parallelogramms die Parallellinien HD und BF ziehet, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen die zwey, durch welche die Diagonallinie nicht gehet, einander gleich sind. Auf eine ähnliche Weise begreifft man, daß sich Triangel in Parallelogramme und umgekehrt verwandeln lassen, wie ich in meinem mathem. Lehrbuch ausführlich gezeigt habe.

Neue Frage, wie man dann die andere Figuren, welche keine Parallelogramma sind, und gar nichts regulaires haben, ausmesse.

§. 156. Nun wird man nicht ohne Grund weiter einwenden, und sagen: es giebt nicht lauter Parallelogramma, die man ausmessen solle; sondern auch ganz irregulaire Vierecke, und überhaupt sowohl regulairer als irregulairer Vielecke eine Menge. Wir haben also für das Maas dieser letztern noch nichts gewonnen.

Beantwortung der Frage, wobey gezeigt wird,

Allein es ist durch den schon erwiesenen Lehrsatz dennoch ungemein viel, ja alles gewonnen: dann wir lernen dadurch alle nur mögliche geradelinichte Dreyecke ausmessen. Da sich nun alle geradelinichte Figuren,

guren, sie mögen Namen haben, was sie für wollen, durch Diagonallinien in Dreyecke eintheilen lassen: so können wir durch Hülfe unseres erwiesenen Lehrsatzes alle nur denkbare geradelinichte Figuren genau ausmessen. Wie man nun ein Dreyeck überhaupt nach dem Lehrsatz §. 151. ausmessen könne, wollen wir jetzo zeigen. Ein jedes Dreyeck kann duplirt und durch die Duplirung in ein Parallelogramm verwandelt werden, es mag hernach ein Quadrat oder Rhombus oder Rectangulum oder Rhomboides seyn. §. 152. Folglich ist ein Dreyeck allemal die Hälfte von einem Parallelogrammo, das einerley Grundlinie und Höhe mit ihm hat. Da man nun alle Parallelogramma genau ausmessen kann, so wird man auch ihre Hälfte ausmessen können. Das siehet man in der Figur selbst. Man ziehe die Diagonallinien AC und AF; so wird §. 152. der $\Delta ABC = \Delta ACG$, und der $\Delta ADF = \Delta AFG$. Folglich $AGC = \frac{1}{2} ABCG$, und $AFG = \frac{1}{2} ADFG$. Nun ist der Beweis leicht zu verstehen.

daß man durch den obigen Lehrsatz §. 155. alle nur mögliche geradelinichte Dreyecke ausmessen könne, folglich auch alle geradelinichte Figuren, weil sie sich in Dreyecke theilen lassen.

Das Flächenmaas eines geradelinichten Dreyecks ist das Product der Grundlinie in die halbe Höhe,

Tab. II. fig. 29.

$ABCG = ADFG$ §. 154.

: 2

$\frac{1}{2} ABCG = \frac{1}{2} ADFG.$

$\Delta AFG = \frac{1}{2} ADFG$

$\frac{1}{2} ABCG = \Delta AFG$

$\frac{1}{2} ABCG = \frac{AG.AB}{2}$ §. 153.

$\Delta AFG = \frac{AG.AB}{2} = AG.\frac{1}{2}AB.$

 Also

Also ist das Maas eines noch so schiefen Dreyecks das Product aus der Grundlinie in die halbe Höhe; oder das halbirte Product aus der Grundlinie in die Höhe; oder das Product aus der Höhe in die halbe Grundlinie: dann alle diese Ausdrücke gelten gleichviel. Demnach ist der Innhalt des Dreyecks ACB in der 30. Figur gleich dem Product aus seiner Grundlinie AB multiplicirt in die halbe Höhe

Tab. II. fig. 30.

$$CD = AB.\tfrac{1}{2}CD = \frac{AB.CD}{2} = CD.\tfrac{1}{2}AB.$$

Ein jedes geradelinichtes Dreyeck kann in ein vollkommenes Quadrat verwandelt werden.

Oder wenn wir AB setzen $= b$ und CD $= a$, so ist der Innhalt $= \frac{ab}{2}$. Wenn ich also aus $\frac{ab}{2}$ die Quadratwurzel extrahire, so habe ich die Seite von einem Quadrat, das dem Dreyeck ACB vollkommen gleich ist. Wie man dieses geometrisch bewerkstelligen könne, wollen wir an seinem Ort zeigen. Uebrigens siehet man, daß sich durch Hülfe des erwiesenen Lehrsatzes alle mögliche geradelinichte Figuren ausmessen lassen: denn ihr Innhalt ist eben allemal die Summe aller durch die Diagonallinien darinn beschriebener Dreyecke; und es kann nicht anders seyn, weil nothwendig das ganze seinen wirklichen Theilen zusammen genommen allemal gleich ist. Bey den Trapezien, welche zwo parallele Seiten haben, gehet die Rechnung noch leichter: dann ihr Innhalt ist das Product der halben Summe der parallelen Seiten in die Höhe;

Warum alle geradlinichte Figuren sich vollkommen ausmessen lassen.

Tab. II. fig. 32.

man

man sehe nur die 32. Fig. so wird sichs leicht geben: $ABC = \frac{1}{2}AC.EB$

$BDC = \frac{1}{2}BD.EB$

$ABDC = (\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD)EB.$

§. 157. Das aber könnte einem noch fremder vorkommen, daß man auch durch Hülfe dieses nemlichen Lehrsatzes die Cirkel, folglich krummlinichte Figuren, so ziemlich genau ausmessen könne. Denn die vollkommene Quadratur des Cirkels ist noch jetzo eine Aufgabe, deren Erfindung zwar nicht so einträglich, aber doch schön wäre. Inzwischen ist man der Wahrheit durch die versuchte Rectification der Peripherie so nahe gekommen, daß man, wenn die Cirkel nicht allzugroß sind, keinen merklichen Fehler begeht. Vorläuffig muß man sich aus dem vorhergehenden §. erinnern, daß ein Triangel leicht in einen andern gleich grossen verwandelt werden könne, wenn man durch seine Spitze H mit der Grundlinie BD eine Parallellinie FC ziehet, und sodann nach Belieben andere Dreyecke, wenn sie nur einerley Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallellinien stehen, z. E. das Dreyeck DCB u. s. w. beschreibet. Demnach wird das Dreyeck DCB = DHB; ferner ECD = EGD, u. s. w. Wenn nun, wie wir setzen wollen, alle Dreyecke AFE, EGD, DHB einerley Höhe haben, so wird das grosse

Ob und wie man auch eine Cirkelfläche durch Hülfe des obigen Lehrsatzes ausmessen könne.

Wie mehrere Dreyecke von gleicher Höhe u. Grundlinie in ein einiges verwandelt werden.

Tab. II. fig. 31.

△ACB der Summe dieser Dreyecke zusammen genommen gleich seyn. Denn

△DHB = △DCB
△EGD = △ECD
△AFE = △ACE

△DHB + EGD + AFE = △DCB + ECD + ACE.
△ACB = △DCB + ECD + ACE.

△ACB = △DHB + EGD + AFE.

Was man durch diese Verwandlung bey dem Maas der Cirkelfläche gewinne, und wie ein jeder Cirkel in ein Dreyeck sich verwandeln lasse, dessen Höhe der Radius und dessen Grundlinie die Peripherie ist.

Nun kann der Cirkel betrachtet werden als ein Unendlicheck, oder als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten; deren jede die Grundlinie von einem Dreyeck ist, dessen Spitze in den Mittelpunkt gehet, und dessen Höhe dem Radius gleich ist, weil die Grundlinie unendlich klein, und folglich die Perpendicularlinie von den Schenkeln des Dreyecks fast um gar nichts unterschieden ist. Wenn nun der Cirkel in Gedanken aufgemacht wird, so daß die Peripherie in eine gerade Linie sich verwandelt, so werden die unendlich viele Dreyecke, wie diejenige, die in der 31. Figur gezeichnet sind, im kleinen aussehen; folglich kann man die Summe aller dieser Dreyecke in ein einiges, wie ACB, verwandeln, dessen Höhe der Radius BC, und dessen Grundlinie die Peripherie AB ist; folglich wird der Innhalt seyn $\frac{AB.BC}{2}$. Wenn man nun die Peripherie des Cirkels π und den Radius r nennet, so ist der Innhalt des Cirkels $\frac{\pi r}{2}$. Auf diesen Ausdruck ist der

Ein Ausdruck, auf welchen der

grosse Mathematicus Keppler, wie vor

ihm

ihm Archimedes auf die Figur, zuerst gefallen. Wenn man also wüßte was π wäre, so würde der Innhalt des Cirkels genau gefunden werden; und der Ausdruck $\frac{\pi r}{2}$ würde sich auf alle Cirkel anwenden lassen, weil sie alle einander ähnlich sind §. 10. oder weil der Radius eines kleinen Cirkels sich zu seinem Cirkel verhält wie der Radius eines grossen Cirkels zu seinem Cirkel. §. 140. Man kann auch die fünfte Figur damit vergleichen, aus welcher erhellet, daß alle mögliche Cirkel einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, oder concentrisch vorgestellt werden können; dahero die Bögen BD und bd, folglich auch die ganze Peripherien sich verhalten müssen wie die Radii CB und Cb; wie wir unabhängig von dem Cirkel im folgenden erweisen werden. Man merket also, daß die Verhältniß des Radius, folglich auch des doppelten Radius oder des Diameters zur Peripherie beständig bleibt, und nicht verändert wird; die Cirkel mögen groß oder klein seyn. Weil wir aber keinen Ausdruck für die Cirkelfläche finden können, in welchem die Peripherie nicht mit in die Rechnung käme, so wäre freylich zu wünschen, daß man sie rectificiren oder in eine gerade Linie verwandeln könnte. Accurat hat sich diese Verwandlung bisher noch nicht finden lassen; doch ist man der Wahrheit

grosse Keppler zuerst gefallen ist.

Der Ausdruck ist allgemein, und schicket sich auf alle Cirkel;

Tab. I. fig. 5.

weil der Radius zur Peripherie immer einerley Verhältniß hat.

Warum aber dem ungeachtet der Cirkel nicht völlig quadrirt, oder in ein Quadrat verwandelt werden könne;

wie man aber doch dem wahren Quadrat durch mühsame Rechnungen so nahe gekommen, daß der Fehler bey nicht gar zu grossen Cirkeln, fast unmerklich ist;

heit durch mühsame und lange Rechnungen so nahe gekommen, daß der Fehler bey kleinen Cirkeln fast gar nichts beträgt. Denn man hat innerhalb des Cirkels, wie auch ausserhalb um ihn herum zwey Vielecke beschrieben, deren Sehnen so klein angenommen wurden, als man konnte; zwischen diese beede Vielecke fällt nun natürlicher Weise die Peripherie des Cirkels hinein; sie ist also die mittlere Proportionallinie zwischen dem unmittelbar grössern und kleinern Vieleck. Man hat sie berechnet, und gefunden, daß die Verhältniß des Diameters zur Peripherie bey nahe seye wie 100 zu 314. Dieses Verhältniß muß man nun auswendig behalten, wenn man einen Cirkel berechnen will. Denn es seye der Diameter eines Cirkels 20′, so wird man nach den Proportionsregeln sagen müssen:

wenn man die Verhältniß des Diameters zur Peripherie wie 100 zu 314 annimmt.

$$100 : 314 = 20 : \frac{20 \cdot 314}{100},$$

welches die Peripherie des gesuchten Cirkels in einer geraden Linie bey nahe seyn wird. Wenn ich sie nun mit $\frac{1}{2}r$, das ist, weil der Diameter $2r = 20$, mit $\frac{20}{4}$ multipliciere, so habe ich die Fläche des Cirkels. Ich muß also die Peripherie mit dem vierten Theil des Diameters multipliciren; denn der halbe Radius ist allemal der 4te Theil des Diameters. Es sey der Diameter

woraus die beynahe wahre Fläche eines Cirkels sich bestimmen läßt.

$$a = 2r$$
$$\overline{} : 2$$
so ist $\frac{1}{2}a = r$
$$\overline{} : 2$$
und $\frac{1}{4}a = \frac{r}{2} = \frac{1}{2}r.$

Man kann dahero aus dem Diameter die Peripherie, aus der Peripherie den Diameter,

Der Ausdruck $\frac{\pi r}{2}$ ist also eben so viel, als $\frac{a\pi}{4}$ wenn a der Diameter ist. Will ich aus der gegebenen Peripherie π den Diameter finden, so setze ich,

Tab. I. fig. 4.

$$314 : 100 = \pi : \frac{100.n}{314},$$ welches der gesuchte Diameter seyn wird. Eben so finde ich einen gegebenen Bogen z. E. RB, und sodann den Cirkelausschnitt (sectorem circuli) RCB, wenn die Peripherie π, der Diameter a und der Bogen RB = n° gesetzt wird. Nun suche ich zuerst die Peripherie, und sage

ferner aus dem Diameter u. einem in Graden gegebenen Bogen den Ausschnitt eines Cirkels durch die Proportionsregeln finden.

$$100 : 314 = a : \frac{314.a}{100}$$ ferner den Theil der Peripherie RB, oder den Bogen n, durch eine gleiche Verhältniß nach den Graden §. 140; da es dann heißt

$$360° : n° = \frac{314.a}{100} : \frac{314.a.n°}{100.360}$$

So heißt der in eine gerade Linie verwandelte Bogen RB. Wenn ich ihn nun mit dem vierten Theil des Diameters multiplicire; so habe ich $\frac{314.a^2.n°}{400.360°}$, welches der Innhalt des flachen Sectors RCB ist.

§. 157.

Hieraus erhellet weiter, daß es eine beständige Verhältniß zwischen dem Quadrat des Diameters und der Fläche des Cirkels, nemlich 1000 : 785 gebe.

§. 157. Wenn der Diameter 100 ist, so ist sein Quadrat 100 . 100 = 1000; und wenn die Peripherie 314 hält, so ist die Fläche des Cirkels $314 . \frac{100}{4} = 7850$; wenn man nemlich wirklich multiplicirt. Folglich verhält sich das Quadrat des Diameters zur Fläche des Cirkels selbst wie 1000 zu 7850; oder

$$100^2 : \frac{314 \cdot 100}{4} = 10000 : 7850,$$

das ist, wenn man beederseits mit 10 dividirt:

$$= 1000 : 785.$$

und daß alle Cirkelflächen sich zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Diameter.

Nun wollen wir zween Cirkel betrachten; einen grossen und kleinen; die Fläche des einen solle C, des andern c heissen: der Diameter des grössern C solle A, des kleinern aber a seyn; so wird seyn

$$A^2 : C = 1000 : 785$$
$$a^2 : c = 1000 : 785 \quad \text{folglich}$$
$$A^2 : C = a^2 : c,$$

und durch die Versetzung der mittlern Glieder

$$A^2 : a^2 = C : c.$$

Das heißt in Worten ausgedruckt: die Flächen der Cirkel verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Diameter. Ein Lehrsatz, den man sich wohl bekannt machen muß; denn er wird im folgenden öfters genutzet werden.

§. 158. Jetzo kommen wir auf einen höchstwichtigen Lehrsatz, welchen Pythagoras

goras erfunden, und dafür durch seine Zuhörer ein Dankopfer von hundert Ochsen oder eine Hecatombe demjenigen grossen GOtt gebracht hat, der ihm die Gabe verliehen, solche wichtige Entdeckungen zu machen. Eine Ehrerbietung und Bescheidenheit, welche von der gelehrten Nachwelt zwar gelobt aber selten nachgeahmet wird. Pythagoras hat die Seite, die in einem rechtwinklichten Dreyeck dem rechten Winkel entgegen stehet, die Hypothenuse, und die beede übrige Seiten, die den rechten Winkel einschliessen, die Catheros genannt, und seinen erfundenen Lehrsatz hernach also ausgedruckt: das Quadrat der Hypothenuse ist gleich den Quadraten der beeden Cathetorum zusammen genommen. Das ist, nach der Figur: das Quadrat auf der Linie AB, oder ABDE ist gleich den Quadraten auf der Linie AC und CB, oder ACIK und CBGH. Das wollen wir jetzo beweisen. Man ziehe die Linien AG und CD, so wird man bald sehen, daß die Dreyecke ABG und DBC einander gleich sind; wenn man das einmal bewiesen hat, so ist das Fundament zum folgenden ganzen Beweis gelegt, wenn man nur die Parallellinie CF, und die zwo Diagonallinien LD und CG vollends ziehet. Nach unserer Bedingung ist also

Vorbereitung zu dem wichtigen Lehrsatz, welchen Pythagoras erfunden hat.

Was die Hypothenuse und was die Catheti in einem rechtwinklichten Dreyeck seyen.

Tab. II. Fig. 33.

Der Lehrsatz selbst, nemlich: das Quadrat der Hypothenuse ist den beeden Quadraten der Cathetorum gleich,

wird umständlich erwiesen.

$m = n$, dann alle Winkel im Quadrat sind rechte Winkel §. 152.

$o = o$

——— folglich §. 9.

$m + o = n + o$, ferner

$AB = BD$, weil alle Seiten in einem
$BG = BC$ Quadrat einander gleich sind;

——— folglich §. 144. nr. II.

$\Delta ABG = \Delta DBC$. Ferner §. 156.
$\Delta DBL = \Delta DBC$

——— also

$\Delta DBL = \Delta ABG$ ferner §. 156.
$\Delta CBG = \Delta ABG$

——— demnach §. 9.

$\Delta DBL = \Delta CBG$ das ist §. 156.
$\frac{1}{2} DBLF = \frac{1}{2} CBGH$. Folglich

——— . 2

$DBLF = CBGH = CB^2$; Eben so beweißt man, daß
$ALFE = ACIK = AC^2$

——— folglich

$DBLF + ALFE = CB^2 + AC^2$ das ist:
$ABDE = CB^2 + AC^2$ oder
$AB^2 = CB^2 + AC^2$.

Wie man durch Hülfe dieses Lehrsatzes ein Quadrat in zwey, und zwey in eins leicht verwandeln könne;

Das ist nun der Beweis dieses wichtigen Lehrsatzes, wodurch man in den Stand gesetzet wird, sogleich ein Quadrat in zwey andere, oder umgekehrt zwey in eins zu verwandeln: denn wenn man auf der gegebenen Seite des Quadrats ein rechtwinklichtes Dreyeck aufrichtet; so werden

den die Quadrate der beeden Seiten dem gegebenen Quadrat gleich seyn. Eben so darf man nur die Seiten zweyer gegebenen Quadrate rechtwinklicht zusammen setzen, und hernach die Hypotenuse ziehen; so wird man die Seite desjenigen Quadrats finden, welches den beeden gegebenen gleich ist. Will man ein Quadrat, das drey andern Quadraten gleich ist, so darf man nur die Operation doppelt machen. Z. E. in der 34. Fig. wenn CA und AB recht- winklicht zusammengesetzt werden, so ist $CB^2 = CA^2 + AB^2$; und wenn ich auf CB die Linie DB abermal rechtwinklicht setze, so ist $CD^2 = CB^2 + BD^2$. Folglich $CD^2 = CA^2 + AB^2 + BD^2$. Eben so siehet man, daß man eine Menge von Quadraten durch die Wiederholung dieser Operation nach und nach in ein einiges verwandeln könne.

Auf gleiche Weise lassen sich 3, 4 und mehrere Quadrate in eines u. s. w. verwandeln.

Tab. II. Fig. 34.

§. 160. Diß ist aber noch das wenigste, was von der Fruchtbarkeit dieses Lehrsatzes gesagt werden kann. Im folgenden werden sich ungleich wichtigere Wahrheiten daraus herleiten lassen. Gegenwärtig wollen wir nur zeigen, wie man durch Hülfe dieses Lehrsatzes einen Theil vom Cirkel wirklich vollkommen quadriren könne. Hippocrates, ein verunglückter Kaufmann, hat sich zuletzt auf die Mathematik gelegt, und durch die Erfindung, die wir jetzo beschreiben, seine Namen verewiget.

Andere noch weit wichtigere Folgen, welche aus diesem Lehrsatz fliessen.

Tab. II. Fig. 35.

Die Erfindung des Hippocrates

beruhet darauf, nach welcher sich ein Stück vom Cirkel, welches lunula Hippocratis heißt, vollkommen quadriren läßt.

ewiget. Denn das vom Cirkel quadrirte Theilgen, davon wir jetzo reden, heißt noch heut zu Tag Lunula Hippocratis. Wenn man zween Cirkel beschreibet, davon der eine noch so groß als der andere ist, so wird das Stück AFBE, welches die Differenz zwischen der Hälfte und dem vierten Theil der beeden Cirkel ist, der halbe Mond des Hippocrates (Lunula Hippocratis) genannt, weil es einem halben Mond nicht unähnlich siehet. Man ziehe den Diameter AD vom grossen Cirkel, den wir C nennen wollen, und beschreibe den kleinern Cirkel AFBA so, daß sein Diameter AB der Seite des in den grössern Cirkel einzuschreibenden Quadrats gleich werde; welches geometrisch geschehen kann.

Beweis der gemeldeten Quadratur, oder Verwandlung eines Cirkelstücks in ein geradelinichtes Dreyeck.

§. 153. Man darf nur in den grossen Cirkel ein Quadrat hineinschreiben, und die Seite des Quadrats AB zum Diameter des kleinen Cirkels machen; so ist, weil AB=BD, nach der Natur des Quadrats, $AD^2 = 2AB^2$ §. 159. folglich, wenn der grosse Cirkel C und der kleine c heisset, $C : c = AD^2 : AB^2$ §. 158.

$$= 2AB^2 : AB^2$$

$$\overline{} : AB^2 \quad \text{§. 9.}$$

$$= 2 : 1.$$

Also der grössere gerade noch einmal so groß als der kleinere. Folglich wird die Hälfte vom kleinen Cirkel gleich seyn dem vierten Theil vom grossen: dann weil

C : c

$C : c = 2 : 1$ so ist
$C = 2c$
―――――――― : 4 folglich
$\frac{C}{4} = \frac{2}{4}c$ das ist
$\frac{1}{4}C = \frac{1}{2}c.$ Nun ist in der Figur
$AFBA = \frac{1}{2}c$, und der Quadrant
$AEBC = \frac{1}{4}C.$ Folglich

$AFBA = AEBC.$ Es ist ferner §. 9.
$AEBA = AEBA.$

$AFBA - AFBA = AEBC - AEBA.$ Nun ist
$\triangle ABC = AEBC - AEBA$; Wie man aus der Figur nothwendig einsiehet.
―――――――― Folglich
$AFBA - AEBA = \triangle ABC.$ Das ist in der Figur
$AFBA - AEBA = AFBE$, folglich

$AFBE = \triangle ABC.$

Also läßt sich der Mond, wenn er gerade so aussiehet, vollkommen quadriren, weil man ihn in ein Dreyeck geometrisch verwandeln kann, ein Dreyeck sich aber vollkommen quadriren oder ausmessen läßt: denn Quadriren heißt nichts anders, als die Fläche einer Figur in ein Quadrat verwandeln. Dem ungeachtet hat man doch für die Quadratur des Cirkels noch nichts gewonnen, weil das mondförmige Stücklein in zweyerley Bogen von zween verschiedenen Cirkeln eingeschlossen ist. Denn man weiß nicht, der wievielte Theil das Stück AFBE von dem ganzen Cirkel seye. Hätte also Hippocrates das Stück AFBA

Was quadriren hier heisse;

warum aber nichts destoweniger der Cirkel selbst durch Hülfe der Hippo-

cratischen Erfindung noch nicht quadrirt werden könne.

oder ein weit kleiners noch, wenn es nur unten durch eine Sehne oder gerade Linie geschlossen wäre, quadrirt; so würde man den ganzen Cirkel quadriren, und ihm die Quadratur desselben danken können. Die Hippocratische Erfindung ist also übrigens von keinem sonderlichen Nutzen. Weil sie aber viel witziges in sich begreifft, so haben wir sie nicht ganz übergehen wollen.

Von der Nutzbarkeit des Pythagorischen Lehrsatzes bey dem Begriff der Aehnlichkeit, oder bey den Verhältnissen ähnlicher Figuren;

§. 161. Die Nutzbarkeit des Pythagorischen Lehrsatzes wird sich vorzüglich beweisen, wenn wir den Begriff der Aehnlichkeit der geometrischen Figuren vollends erläutert haben werden. Wir können ihn aber, wie Euclides uns dißfalls vorgegangen, auf den Begriff der Gleichheit reduciren. Wir wollen mit der manchen so schwer scheinenden Aufgabe, die mittlere Proportionallinie zwischen zwo gegebenen Linien zu suchen, den Anfang machen. Nach dem pythagorischen Lehrsatz ist in der 34. Fig.

und zwar vornemlich bey Erfindung der mittlern Proportionallinie zwischen zwo gegebenen Linien.

$EC^2 = ED^2 + DC^2$ folglich, da

$DC^2 = DC^2$

$\overline{EC^2 - DC^2 = ED^2}$

Tab. II. Fig. 40.

Wenn nun EC gesetzt wird $= r$

CD $= a$

DE $= x$

so ist nach obigem Ausdruck $r^2 - a^2 = x^2$

und $\sqrt{(r^2 - a^2)} = x = DE.$

Eine jede auf dem Diameter des Cirkels aufgerichtete und in der Peripherie sich endende Per-

Da aber auch $AC = EC = r$, weil AC, EC und CB Radii sind, so wird seyn

AC

$AC - CD = r - a$ und $CB + CD = r + a$ das ist, $AD = r - a$ und $DB = r + a$; wie die Figur von selbst ausweiset. Nun ist $r^2 - a^2 = (r - a).(r + a)$ §. 60. folgl. ist $r-a : \sqrt{(r^2-a^2)} = \sqrt{(r^2-a^2)} : r+a$ §. 78. 80. Das ist in der Figur $AD : DE = DE : DB$. Denn wenn ich die mittlere und äusserste Glieder wiederum multiplicire, so habe $(r-a).(r+a) = \sqrt{(r^2-a^2)}.\sqrt{(r^2+a^2)} = r^2 - a^2$, weil eine jede Wurzel, mit sich selbst multiplicirt, ihr Quadrat giebt; so ist $\sqrt{4}.\sqrt{4} = 4$, $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$, $\sqrt{x^2}.\sqrt{x^2} = x^2$ u. s. w. Demnach ist die Proportion richtig: $AD : DE = DE : DB$.

pendicularlinie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten des Diameters, welche sie abschneidet; wird umständlich aus dem Pythagorischen Lehrsatz erwiesen und erläutert.

Wenn also auf dem Diameter eines Cirkels eine Perpendicularlinie bis an die Peripherie hin aufgerichtet wird, so wird sie allemal die mittlere Proportionallinie zwischen den beeden durch sie gemachten Abschnitten oder Segmenten des Diameters, und zugleich die Quadratwurzel aus dem Product dieser zwey Segmenten seyn. Dieser Lehrsatz ist einer der allerfruchtbarsten in der ganzen Geometrie; wir wollen nur eines der leichtesten und faßlichsten Exempel geben. Man weiß aus dem ersten Theil, wie schwer es seye, die Quadratwurzeln aus Irrationalgrössen zu finden, und wie man aller Mühe ungeachtet doch nicht so weit durch die Approximation es bringen könne, daß man sagen dürfte, nun habe man die Wurzel ganz genau und rich-

Grosse Fruchtbarkeit dieses Satzes.

Wie man durch denselbigen alle

Quadratwurzeln auch aus so genannten Irrationalgrössen geometrisch und aufs genaueste in Linien geben könne.

tig. Hingegen in der Geometrie lassen sich die Quadratwurzeln aus allen nur denkbaren Irrationalgrössen ausziehen. Denn man darf nur eine Zahl in zween Factores theilen, welches allemal geschehen kann, wenn der eine Factor Eins, und der andere die gegebene Zahl ist, und hernach die beede Factores durch Linien ausdrucken, deren Summe den Diameter des Cirkels bestimmen wird, wenn sie schnurgerade zusammen gesetzt werden. Die aus dem Punkt der Zusammensetzung bis an die Peripherie gezogene Perpendicularlinie wird die Quadratwurzel seyn. Z. E. $2 = 1 \cdot 2$, $3 = 1 \cdot 3$, $5 = 1 \cdot 5$ u. s. w. Wenn also $AD = 1$ und $DB = 2$, so ist $DE = \sqrt{2}$; ist $DB = 3$, so ist $DE = \sqrt{3}$; ist $DB = 5$, so ist $DE = \sqrt{5}$ u. s. w. Denn

$$AD : DE = DE : DB$$

Erklärung und Beweis.

das ist $1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2$

$1 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 3$

$1 : \sqrt{5} = \sqrt{5} : 5$ u. s. w.

Denn die Producte der mittlern und äussersten Glieder sind einander gleich.

Und $DE^2 = AD \cdot DB$ das ist

$2 = 1 \cdot 2$

oder $3 = 1 \cdot 3$

oder $5 = 1 \cdot 5$ folglich auch

$\sqrt{DE^2} = DE = \sqrt{(AD \cdot DB)}$ das ist

$\sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 2}$

$\sqrt{3} = \sqrt{1 \cdot 3}$

$\sqrt{5} = \sqrt{1 \cdot 5}$.

Da

Da nun $\sqrt{DE^2} = DE$, folglich genau durch die Linie DE ausgedruckt wird, so siehet man, daß man eine jede Quadratwurzel geometrisch aufs genaueste finden könne. Weil ferner diese Eigenschaft allen Cirkeln gemein ist, daß die auf dem Diameter stehende und an der Peripherie sich endigende Winkel, rechte Winkel sind, so wird in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck, wenn von der Spitze des rechten Winkels E auf die Hypotenuse AD eine Perpendicularlinie EB herabgefället wird, die Verhältniß statt finden, welche heißt: AB : BE = BE : BD; dann man kann durch die drey Punkte A, E, D nicht nur bekannter massen einen Cirkelbogen überhaupt, sondern auch, weil bey E ein rechter Winkel, gerade einen solchen Cirkelbogen beschreiben, dessen Sehne AD der Diameter wird, folglich wird durch ein rechtwinklichtes Dreyeck allemal ein halber Cirkel bestimmt, und die obige Proportion wird bey allen rechtwinklichten Dreyecken unter der gemeldten Bedingung, daß EB auf AD perpendicular gefället werde, statt finden.

In einem jeden rechtwinklichten Dreyeck ist der von der Tab. II. Fig. 40. Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den dadurch abgeschnittenen Segmenten der Hypotenuse.

§. 162. Es sind noch zween Fälle übrig, welche die Proportionen der Linien in den geradelinichten Dreyecken bestimmen. Der Beweis davon wird sich leicht geben, wenn wir zuvor unsern Lesern gezeigt haben, daß zwey Parallelogramma sich zu einander verhalten wie ihre Grundlinien,

Bestimmung der noch übrigen Fälle, bey der Aehnlichkeit der Dreyecke; da dann vornemlich gezeigt wird, daß alle Par-

allelogramma von gleichen Höhen sich verhalten wie die Grundlinien und umgekehrt, wie die Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind.

Tab. II. Fig. 36.

wenn sie gleiche Höhe haben, oder wie ihre Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind. Das Rectangulum FABE ist in seinem Innhalt AB . BE, und das Rectangulum EBCD ist BC . BE. Da man nun den Innhalt einer Fläche allemal für die Fläche selbst setzen darf, so ist

FABE : EBCD = AB . BE : BC . BE,

oder noch deutlicher

AB . BE : BC . BE = AB . BE : BC . BE

das ist nach

§. 80. nr. VI. AB . BE : BC . BE = AB : BC.

Da nun AB und BC die Grundlinien sind, so verhalten sich zwey Rectangula von gleichen Höhen wie die Grundlinien. Wie sich aber die ganze Rectangula zu einander verhalten, so verhalten sich auch ihre Hälften; oder nach §. 80. nr. VI.

weil AB . BE : BC . BE = AB : BE, so ist

auch $\frac{AB . BE}{2} : \frac{BC . BE}{2} = AB : BE.$

Folglich sind alle Dreyecke von einerley Grundlinie wie ihre Höhen, und die von einerley Höhen, wie ihre Grundlinien.

Da nun diese Hälften rechtwinklichte Dreyecke sind, so verhalten sich auch diese zu einander, wie ihre Grundlinien, wenn sie einerley Höhen haben. Und weil alle Parallelogramma in Rectangula verwandelt werden können, so ist die Verhältniß allgemein; dahero nicht nur alle Parallelogramma, sondern auch ihre Hälften, das ist, alle nur mögliche geradelinichte Dreyecke sich verhalten wie ihre Grundlinien, wenn sie einerley Höhe haben, und wie ihre Höhen, wenn sie einerley Grundlinien haben.

§. 163. Nun können wir leicht die Anwendung

dung auf die noch zween übrige Fälle der Proportionen bey den Dreyecken machen. Man ziehe in einem Dreyeck ACB mit der Grundlinie AB in einer beliebigen Zwischenweite die Parallellinie DE, und vereinige hernach die Punkte D und E wie auch E und A durch die Linie DB und AE, so werden sich zwey gleiche Dreyecke DAE und DBE ergeben; weil sie einerley Grundlinie DE, und, da sie zwischen einerley Parallellinien stehen, auch einerley Höhe haben. §. 162. Folglich wird sich die Proportion von selbst geben:

Anwendung dieser Sätze auf die Proportion der Linien im ähnlichen Dreyeck.

Tab. II. fig. 37. 38.

Erster Fall, die Proportion der Linien zu finden, ohne daß man den Begriff der Aehnlichkeit besonders dazu nöthig hätte.

$$\triangle CDE : \triangle ADE = CD : DA$$

$$\triangle CDE : \triangle \left\{ \begin{matrix} DEB \\ ADE \end{matrix} \right. = CE : EB$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$CD : DA = CE : EB.$$

Wenn man nun die Versetzungen und Veränderungen nach §. 80. hier anbringt, so giebt es folgende Proportionen, welche alle aus der schon gefundenen sich herleiten lassen. Denn wenn man die mittlere Glieder verwechselt, nach §. 80. nr. I. so hat man $CD . CE = DA : EB$

ferner durch die Addition:
§. 80. nr. IV.
$CD + DA : DA = CE + EB : EB$ das ist
in der Figur: $CA : DA = CB : EB$.
und wiederum
§. 80. nr. IV. $CD : CD + DA = CE : CE + EB$, das ist
in der Figur $CD : CA = CE : CB$; folglich
auch nach
§. 80. nr. II. $CA : CD = CB : CE$.

Wir zweiflen keineswegs, daß unsere Leser diese Rechnung verstehen werden, wenn sie

nur die Lehre von den Proportionen, welche, wie wir schon gesagt haben, gleichsam die Seele der mathematischen Wissenschaften ist, noch inne haben, oder wenigstens an dieselbe zurückdenken mögen.

Zweyter Fall, die Proportion der Linien zu finden.

Tab. II. Fig. 38.

§. 164. Es ist noch ein Fall übrig, dessen Betrachtung uns zu einer neuen Gattung von Proportionen führen wird. Man nehme die Linie CA wiederum für die Grundlinie, und ziehe in Gedanken durch den Punkt B eine Parallellinie mit AC, so werden die Dreyecke DAB und CDB, einerley Höhe haben; folglich wird seyn:

$\triangle DAB : \triangle CDB = DA : DC.$ §. 162.
$\triangle \begin{cases} DBE \\ DAE \end{cases} : \triangle CDE = DA : DC.$ §. 163. folglich

$\triangle DAB : \triangle CDB = \triangle DBE : CDE$ und nach §. 80. nr. IV.
$DAB + CDB : CDB = DBE + CDE : CDE$; d. i. in der Figur:
$\triangle CAB : \triangle CDB = \triangle CDB : \triangle CDE.$ Nun ist
$\triangle CAB : \triangle CDB = AB : DE$ §. 162. folglich

$\triangle CDB : \triangle CDE = AB : DE$ und weil auch
$\triangle CDB : \triangle CDE = CB : CE$ §. 162. so ist

$CB : CE = AB : DE$ oder §. 80. nr. I.
$CB : AB = CE : DE,$ nr. II. §. 80.

$CE : DE = CB : AB.$

Eben so beweißt man auch, daß
$CD : DE = CA : AB.$ Denn weil wir bereits bewiesen haben, daß
$CB : CE = AB : DE$ und
$CB : CE = CA : CD$ §. 163. so ist
$CA : CD = AB : DE$ oder §. 80.
$CA : AB = CD : DE$

und

und wenn man die Proportion umkehrt; §. 80. nr. II.

CD : DE = CA : AB.

Doch man siehet von selbst leicht ein, daß alle §. 80. beschriebene Veränderungen hier vorkommen können; dahero wir unsern Lesern das schon gesagte nicht zweymal sagen wollen. Uebrigens habe diesen blos geometrischen Beweis schon in meinen Amœnit. Acad. Fasc. II. vorgetragen, und daselbst gezeigt, daß es je und je für Anfänger besser und tauglicher seye, wenn man aus den angeführten Gründen den Beweis führet, als wenn man den Begriff der Aehnlichkeit allein zu Hülfe nimmt. Wir wollen aber jetzo die ganze Lehre auch aus der Natur der Aehnlichkeit erläutern.

Warum die gegebene Beweise eine besondere und vorzügliche Deutlichkeit haben.

§. 165. Man siehet leicht, daß die zwey Dreyecke CDE und CAB einander ähnlich seyen. Denn sie sind in nichts von einander unterschieden als in der Grösse; und wenn ich das kleinere Dreyeck CDE durch ein Vergrösserungsglas ansehe, so wird es nach und nach dem Dreyeck CAB congruent erscheinen. §. 10. Nun fragt man billig: ob man keine nähere Gründe von der Aehnlichkeit der Dreyecke zu urtheilen, vorbringen könne? Denn das, was wir bisher sagten, ist eben nach dem Gesicht geschlossen; man siehet es ja, daß die zwey Dreyecke einander

Tab. II. fig. 38. 39.

Wie man eben diese Proportionen aus dem Begriff der Aehnlichkeit herleiten könne; und was ähnliche Dreyecke seyen?

woraus man erkenne, daß ein Dreyeck dem andern ähnlich seye?

ander ähnlich seyn. Warum sie aber einander ähnlich seyen, kann man jetzo noch nicht so deutlich wissen. Allein wenn wir bedenken, daß ein Dreyeck durch die Neigung seiner drey Seiten gegeneinander bestimmt werde, so gehet uns schon ein näheres Licht auf: denn wenn die Neigung der Seiten gegeneinander gleich ist, so werden die Dreyecke einander ähnlich seyn, ihre Seiten mögen groß oder klein werden, weil in diesem Fall nichts ausser der Grösse gedacht werden kann, wodurch man zwey Dreyecke unterscheiden könnte. Das ist aber der Begriff der Aehnlichkeit §. 10. folglich sind zwey Dreyecke einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben; und diese Gleichheit der Winkel folgt unmittelbar aus den bereits von uns erwiesenen Proportionen der Seiten. Denn weil die Linie DE mit AB parallel seyn muß, wenn die Proportionen statt haben sollen, so ist der Winkel n = m und r = s, wie aus der Eigenschaft der Wechselswinkel erhellet, §. 146. Der Winkel o ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich. Folglich sind alle drey Winkel einander gleich; ja man hat nicht einmal nöthig, von allen drey Winkeln diese Gleichheit zu beweisen: denn wenn nur zween Winkel in zweyen Dreyecken einander gleich sind, so muß der dritte in einem, auch dem dritten im andern Dreyeck

Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben:

Tab. II. fig. 39.

Diese Eigenschaft der ähnlichen Dreyecke fließt aus dem obigen Beweis §. 163.

Wenn in zwey Dreyecken nur zween Winkel einander

eck gleich seyn. Die Winkel seyen m und s in einem, und im andern Dreyeck n und r, so wird der dritte Winkel, weil die Summe aller drey Winkel 180° macht, nothwendig seyn $= 180° - (m + s)$ im einen, und im andern $= 180° - (n + r)$. Diese zween Ausdrücke werden nun einander gleich seyn, wenn $r = s$ und $m = n$; folglich auch $r + n = s + m$: dann

ähnlich sind so sind die Dreyecke einander ähnlich, weil in diesem Fall der dritte Winkel vorhin dem dritten gleich seyn muß. Beweis.

$$
\begin{array}{c}
180 = 180 \\
r + n = s + m \\
\hline
180 - (r + n) = 180 - (s + m).
\end{array}
$$

Das ist aber der dritte Winkel. Er wird also durch die Gleichheit zweyer Winkel von selbst bestimmt; und man kann sagen, daß, wenn zween Winkel in zwey Dreyecken einander gleich sind, auch der dritte dem dritten gleich seye. Die Seiten, welche gleichen Winkeln entgegen gesetzt werden, sind hernach proportionell. Man heißt sie deswegen gleichnamigte Seiten, (latera homologa). Wenn man also von zweyen Dreyecken, sie mögen stehen, wo sie wollen, bewiesen hat, daß zween Winkel im einen zweyen im andern gleich seyen, so werden ihre Seiten alle diejenige Verhältnisse haben, die wir §. 163. 164. vorgetragen; folglich werden auch alle Veränderungen, davon wir §. 80. gehandelt haben, sich dabey anbringen lassen. Die ganze Kunst besteht darinn,

Was gleichnamigte Seiten und Winkel seyen.

daß

und wie dahero eine gleichnamigte Seite proportionell seye, welches man bey Setzung der Verhältnisse wohl zu merken hat.

daß man die erste Verhältniß recht setzet, und allemal gleichnamigte Seiten in einem wie in dem andern Dreyeck einander correspondiren läßt. Z. E. ich setze die einfache Verhältniß CD : CE; was für zwo Linien muß ich im grössern Dreyeck dazu nehmen, daß eine Proportion herauskommt? Weil CD dem Winkel r entgegen stehet, so wird die gleichnamigte Seite CA heissen, als welche dem Winkel s = r entgegen stehet, folglich heißt das dritte Glied CA; und weil CE dem Winkel n entgegen steht, so heißt die gleichnamigte Seite im grossen Dreyeck CB, dann sie steht dem Winkel m=n entgegen.

Tab. II. Fig. 40.

Anwendung der Sätze von der Aehnlichkeit auf die oben §. 163. bestimmte Fälle;

Eben so kann man zeigen, daß in der Fig. 40. die drey Triangel oder Dreyecke AED, AEB, und BED einander ähnlich seyen. Denn

$$\begin{array}{l} o + x = 90^\circ \\ m \quad\;\; = 90^\circ \\ \hline o + x = m \end{array}$$

$r = r$ folglich, auch der dritten dem dritten,

das ist $o = s$

$$\triangle AED \backsim \triangle AEB.$$

ferner weil $m = n$ wegen der Perpendicularlinie EB

und $o = s$ so ist auch der dritte Winkel dem dritten gleich, das ist

$$r = x$$

folglich $\triangle AEB \backsim \triangle BED$

und weil $\triangle AEB \backsim \triangle AED$, so ist §. 9. auch

$$\triangle BED \backsim AED.$$

Also

Also sind alle drey einander ähnlich, und wo diese Aehnlichkeit statt findet, da sind die gleichnamigte Seiten proportionell. Anfänger können sich die Sache deutlicher machen, wenn sie von Chartenpapier oder Papendeckel solche Dreyecke, dergleichen in der 40. Figur stehen, ausschneiden, und sodann die gleiche Winkel auf einander legen; in welchem Fall sie den ganzen Beweis der Einbildungskraft vor die Augen hinmahlen, und ihre Figur auf die 39. und 38. Figur reduciren können. Uebrigens siehet man nun auch die Ursache ein, woher es komme, daß man zur Bestimmung eines Dreyecks allemal wenigstens eine Seite unter den drey bestimmenden Theilen nöthig habe, und warum die Aufgabe noch unbestimmt seye, wenn einem blos drey Winkel gegeben werden. Denn aus drey gegebenen Winkeln, deren Summe zusammen gerade 180° machen muß, kann man eine Menge von Dreyecken machen, welche alle zwar einander ähnlich, nicht aber auch gleich, oder congruent, folglich noch unbestimmt sind.

Wie sich Anfänger die Sache noch deutlicher vorbilden können.

Warum aus drey gegebenen Winkeln kein Dreyeck vollkommen bestimmt werden könne, und man allemal wenigstens eine Seite dazu nöthig habe?

§. 166. Jetzo haben wir alles gesagt, was zur Theorie bey den Grundlinien und Flächen nebst ihren Verhältnissen gehöret. Einige wenige Aufgaben dürfen wir nicht ganz mit Stillschweigen übergehen. Die leichteste ist die auf die Geo-

Anwendung der Regel Detri auf Linien.

metrie angewandte Regel Detri. Denn man kann in der Geometrie aus drey gegebenen Linien die vierte so gut finden, als man in der Arithmetik aus drey Zahlen die vierte Proportionalzahl finden kann. Z. E. man solle zu den Linien CD, DE, und CA die vierte Proportionallinie finden. In diesem Fall darf man nur die Linie DE unter einem beliebigen Winkel auf CD setzen, sodann CD bis A verlängern, damit man CA bekomme; hernach mit DE aus dem Punkt A die Parallellinie AB ziehen, welche die durch die Puncte C und E zu ziehende Linie CB bestimmen wird. Denn es verhält sich ja

und wie man aus drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie finde.

Tab. II. Fig. 39.

$$CD : DE = CA : AB;$$

folglich ist AB, wie in der Arithmetik,

$$= \frac{CA \cdot DE}{CD},$$

d. i. wenn man das Product der zweyten und dritten Linie mit der ersten dividirt, so hat man die vierte Proportionallinie. Diese Aufgabe kann man noch auf verschiedene Weise auflösen. Uns aber genüget, eine einige Methode für die Ausübung angeführt zu haben. Wie man die mittlere Proportionallinie finde, haben wir §. 161. gezeigt. Eben so begreiffen unsere Leser von selbst, wie man auch durch Hülfe ähnlicher Dreyecke einen sogenannten verjüngten Maasstab machen könne; weil er aber zur anwendenden Mathematik gehört,

Wie man aus dem bisherigen die Art und Weise erlerne, einen verjüngten

gehört, so halten wir uns nicht weiter damit auf. Wer einmal einen gesehen hat, der wird sich leicht erinnern, daß durch die Parallellinien so viel ähnliche Dreyecke bey der ersten Abtheilung abgeschnitten werden, als Parallellinien gezogen wurden. Dahero sich die Zolle und Linien von selbst geben, wenn man eine Länge abmessen will. Will man eine geradelinichte Fläche ausmessen und in gleiche Theile eintheilen, so verwandelt man sie durch die zuziehende Diagonallinien zuerst in Dreyecke, die man ausmißt, und deren Summe dem ganzen Innhalt gleich ist; diesen Innhalt dividirt man mit der Zahl der Theile, in welche die Fläche getheilt werden solle, und sucht hernach aus dem Innhalt die Theile selbst, durch die Addition oder Subtraction eines Dreyecks zu dem ersten Dreyeck in der Figur; je nachdem es kleiner oder grösser ist, als der gesuchte Theil; und fährt sodann mit dieser Operation so lange fort, bis man die Theile alle bekommt. Will man eine Fläche auf dem Felde ins kleine bringen, so darf man nur einen Punkt C annehmen, und die Linien CD, CE, CF, CG, CH, ziehen; sodann nach Belieben, je nachdeme man die Figur kleiner oder grösser haben will, die mit dem äussersten Umfang parallel zuziehende Linien de, ef, fg, gh, hd beschreiben; in

Maaßstab zu machen, welches aber in die practische Geometrie gehört.

Wie allerhand Flächen im Felde vertheilet werden können.

Tab. III. Fig. 41.

Wie man eine grössere Figur ins kleine bringen und verjüngen solle.

welchem Fall die Figur defgh der grössern DEFGH vollkommen ähnlich seyn wird, weil sich nach §. 164. verhalten Cd:de=CD:DE, Ce:ef=CE:EF; u.s.w. Hieraus erhellet noch ein neuer Grund, warum alle Cirkel einander ähnlich seyen. Denn ich kann den Cirkel als ein Polygon von unendlich viel Seiten betrachten. Wenn ich nun aus dem Mittelpunkt C an alle Ecke des Polygons Radios, und mit den unendlich kleinen Seiten in beliebiger Distanz Parallelseiten ziehe, so wird die Summe aller dieser Seiten einen Cirkel geben, welcher dem grössern eben so gut ähnlich ist, als die Figur defgh der Figur DEFGH ähnlich ist.

Wie hieraus abermal ein neuer Grund erhelle, warum alle Cirkel einander ähnlich, folglich die Peripherien einerley Verhältniß zu ihren Diametern haben. u. s. w.

Einige sogenannte algebraische, wiewohl nicht schwerere Aufgaben, als die bisherige waren, werden angeführt.

§. 167. Weil wir oben versprochen haben, auch noch zu zeigen, wie die Seiten der regulairen Polygone gefunden werden, die sich in den Cirkel hineinschreiben lassen; so wollen wir von dieser Materie noch etwas sagen. Das Sechs- und Viereck wissen wir schon. Wie findet man aber die übrigen? Wir versuchen es zuerst mit der Seite des gleichseitigen Dreyecks, welche man aus dem gegebenen Radio oder der Seite des Sechseckes findet. Es seye der Radius $DC = CB = DB = r$, so ist $DF = \frac{1}{2}r$, weil bey F rechte Winkel sind, folglich durch die Perpendicularlinie BF die Grundlinie DC in dem gleichseitigen Dreyeck in zween glei-

Wie man die Seite des in Tab. IV. fig. 61. den Cirkel einzuschrei-

gleiche Theile getheilet wird. Die gesuchte Seite des Dreyecks, nemlich die Seite AB seye x, so ist nach §. 151. BF $= \frac{1}{2}x$; weil bey F rechte Winkel sind, und die verlängerte Linie DC durch den Mittelpunkt des Cirkels geht. Da nun

benden regulairen oder gleichseitigen Dreyecks finden könne;

$$DB^2 - DF^2 = FB^2 \quad §. 160.$$

oder $r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2$

das ist $\frac{3}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2$

———————— . 4 so ist

$$3r^2 = x^2 \quad \text{folglich}$$

$$3r : x = x : r.$$

Demnach ist die gesuchte Seite des Dreyecks die mittlere Proportionallinie zwischen dem dreyfachen und einfachen Radius des Cirkels, welche sich nach §. 161. geometrisch finden läßt; oder auch $x = r\sqrt{3}$; in welchem letztern Fall man die Quadratwurzel aus drey durch die Approximation suchen, und sie hernach mit dem Radio multipliciren muß. Will man die Seite des regulairen Achteckes wissen, so darf man nur die Radios AC und CB unter einem rechten Winkel aus dem Mittelpunkt C ziehen, sodann die Punkte B und A, durch die Linie BA, welche die Seite des Vierecks ist, vereinigen, und endlich AB durch die Linie DC in zween gleiche Theile theilen, da dann DB die Seite des regulairen Achtecks seyn wird. Denn wenn wir AC = BC wie oben r nennen; so ist

Tab. IV. fig. 62.

ferner, wie man die Seite des regulairen Achteckes berechnen könne;

$$AB = \sqrt{2r^2}$$
$$BE = \tfrac{1}{2}\sqrt{2r^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}.2r^2} = \sqrt{\tfrac{2}{4}r^2} = \tfrac{1}{2}r^2$$
$$EC = \sqrt{(BC^2 - BE^2)} = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{2}r^2)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}r^2}$$
$$DE = DC - EC = r - \sqrt{\tfrac{1}{2}r^2}, \text{ folglich}$$
$$DE^2 = r^2 - 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}r^2} + \tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{3}{2}r^2 - 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}r^2}$$
$$BE^2 = \tfrac{1}{2}r^2$$

$$DB^2 = DE^2 + BE^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}r^2}$$
$$DB = \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}r^2})}$$

Dieses ist die Seite des Achteckes. Auf gleiche Weise bemühet man sich, die Seiten der übrigen Polygone zu suchen; da es dann freylich oft beschwerliche Rechnungen geben muß. Wir halten aber unsere Leser nicht weiter damit auf, weil sie aus dem bisherigen schon den Schluß auf ähnliche Rechnungen machen können; und weil es überhaupt keine allgemeine Regel für die Polygone giebt, und die sogenannte Renaldinische Regel nach den von mehrern schon gegebenen Beweisen, eine wirklich falsche Regel ist.

Was die sogenannte linea divina der Alten seye, und wie man sie aus

§. 168. Wir wollen, ehe wir zur Stereometrie kommen, noch einige Aufgaben anführen. Die Alten haben sich auf die sogenannte lineam divinam nicht wenig eingebildet. Es ist dahero der Mühe werth, daß wir sie erklären. Wenn man in einer gegebenen geraden Linie denjenigen Punkt findet, durch welchen die Linie so zerschnitten wird, daß das Quadrat des grössern Stückes dem Product

aus

aus dem kleinern Stücke in die gegebene ganze Linie gleich ist, so hat man diese görtliche Linie erfunden. Es seye demnach die gegebene Linie AC, man verlangt den Punkt B zu wissen, damit hernach $BC^2 = AC . AB$ werde. Die Linie AC wollen wir a nennen; BC die gesuchte Linie soll x heissen: folglich wird AB seyn $a - x$. Da nun seyn solle

den bisherigen Lehrsätzen suchen und bestimmen könne.

Tab. IV. fig. 63.

$BC^2 = AC . AB$, das ist

$x^2 = a . (a - x) = a^2 - ax$, so suchen wir x, und setzen nach der Bedingung

$x^2 = a^2 - ax$, folglich ist

$x^2 + ax = a^2$ und weil

$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ nach §.

$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$ folglich

$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ und

$x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a.$

Wenn man nun CE = AC rechtwinklicht auf AC setzt, und sodann $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$ machet, so ist,

weil $DE^2 = CE^2 + CD^2$

$= a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$

$DE = \sqrt{\frac{5}{4}a.}$

Beschreibet man nun mit DE aus dem Punkt D den Bogen EB, so ist

$BD = DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

und $BD - CD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$

Da nun $BD - CD = CB$, wie aus der Figur erhellet, so ist CB die gesuchte Linie,

Von einigen andern Aufgaben, z. E. wie man aus der gegebenen Grundlinie und Innhalt eines rechtwinklichten Dreyecks seine Höhe finde, u. s. w.

und B der Punkt, in welchem die Linie geschnitten werden muß, wenn sie die verlangte Beschaffenheit haben solle. Es giebt noch verschiedene andere Aufgaben; z. E. man solle aus dem gegebenen Innhalt und der Grundlinie eines rechtwinklichten Dreyecks seine Höhe finden. Der Innhalt seye a^2 und die halbe Grundlinie b; die ganze Kunst bestehet nunmehro darinnen, daß man für den Innhalt einen andern Ausdruck findet, in welchem die Höhe, die wir y nennen wollen, angemerkt wird. Weil nun ein jedes Dreyeck das halbe Product der Grundlinie in die Höhe zu seinem Innhalt hat; so wird auch

$$by = a^2 \quad \text{und}$$

$$\overline{} : b$$

$$y = \frac{a^2}{b}$$

Wenn man also den gegebenen Innhalt durch die halbe Grundlinie dividirt, so hat man die Höhe. Dergleichen Aufgaben giebt es die Menge, und es ist fein, wenn man seinen Witz dabey übet; unsere Sache aber ist es dißmalen nicht, gegenwärtige Blätter mit vielen Aufgaben zu vermehren. Eine führen wir noch in Rucksicht auf die krumme Linien an; man verlangt

Eine Aufgabe in Rucksicht auf die

zu wissen: unter was für einem Winkel sich diejenige Cirkel schneiden, deren Diameter an ihren beeden Enden aufeinander perpendicular stehen? Wir werden bald hören, daß sie alle einander unter lauter rechten Winkeln schneiden; oder daß der Winkel $o + n$, unter welchem der Cirkel ADE den Cirkel ADF schneidet, allemal ein Winkel von 90° ist. Man ziehet nur aus den beederseitigen Mittelpunkten B und C die Radios BD und CD in den Punkt des Durchschnittes D; so hat man, weil $BD = BA$, und $CD = CA$, zwey gleichschenklichte Dreyecke ABD und ACD, wenn nemlich die Linie AD gezogen wird. Demnach ist

krumme Linien; nemlich unter was für einem Winkel diejenige Cirkel einander schneiden, deren Diameter aufeinander perpendicular stehen.

Tab. IV. fig. 64.

$$x = o$$
$$x = n$$
$$\overline{x + y = o + n}$$
$$x + y = 90^\circ \text{ nach der Bedingung, folglich}$$
$$\overline{o + n = 90^\circ.}$$

Also schneiden sich alle mögliche Cirkel von dieser Gattung jedesmal unter einem rechten Winkel. Doch genug von diesem. Es ist die Körperlehre noch übrig, davon wir zum Beschluß dieses Capitels vollends reden müssen.

§. 169. Man kann nicht nur Linien und Flächen, sondern auch Körper ausmessen; und diese Kunst heißt man die Stereometrie, welche sich mit der Länge,

Vorbereitung zum Körpermaaß oder zur Stereometrie.

Breite und Höhe zugleich beschäfftiget. Wie man zu dem Maas der Linien, Linien, und zu dem Maas der Flächen, Flächen gebraucht, so gebraucht man zu dem Maas der Körper wieder Körper. Es ist nur die Frage, was man für einen Körper, einen runden, oder eckigten u. s. w. dazu nehmen solle? Im folgenden werden wir hören, daß sich der viereckigte, welcher gleich lang, breit und hoch ist, am besten darzu schicke, wie man aus gleichem Grunde zu dem Flächenmaas das Quadrat erwählet hat. Ein solcher Körper heißt ein Cubus; ist er einen Schuh lang, breit und hoch, so heißt er ein Cubicschuh; ist er aber nur einen Zoll lang, breit und hoch, so wird er ein Cubiczoll genannt; und wenn er endlich eine Ruthe lang, breit und hoch ist, so bekommt er den Namen einer Cubicruthe. Jetzo darf man billig fragen: wie sich dann Cubiczolle, Schuhe und Ruthen gegeneinander verhalten, oder wie viel Cubiczoll auf einen Cubicschuh und wie viel Cubicschuhe auf eine Cubicruthe gehen? Wir wollen umständlich darauf antworten, wenn wir gezeigt haben, wie man einen Cubus ausmesse. Die 42. Fig. zeiget einen vollkommenen Cubus. Seine Länge solle 3' seine Breite 3' und seine Höhe 3' seyn; folglich lassen sich auf die unterste Fläche 3 . 3 oder 9 Cubicschuhe herum stellen

Warum sich der viereckigte Körper, welcher gleich lang, breit und hoch ist, das ist, ein Cubus, am besten zum Körpermaas schicke,

was Cubiczolle, Schuhe und Ruthen seyen;

Wie man einen vollkommenen Cubus ausmesse;

Tab. III. fig. 42.

len; auf die zweyte abermal 9, und auf die dritte noch einmal 9; das ist in allem 27. Wenn ich also die Länge dreymal mit sich selbst multiplicire, so bekomme ich den Innhalt des Cubus; dann $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$. Nun ist eine Ruthe 10' lang, folglich wird der Innhalt einer Cubicruthe $10 . 10 . 10 = 10^3 = 1000$ Cubicschuhe betragen; ein Schuh ist 10'' lang, folglich ist der Innhalt eines Cubicschuhes $10 . 10 . 10 = 10^3 = 1000$ Cubiczoll; will man den Zoll noch in Linien theilen, so wird ein Cubiczoll 1000 Cubiclinien halten u. s. w. Hieraus siehet man schon, was die Cubicrechnung für eine Progression gebe, und daß man bey derselbigen allemal drey Zahlzeichen für den Zoll und eben so viel für die Schuhe abschneiden müsse, ehe man zu den Ruthen kommt; wenn nemlich Zoll und Schuhe nebst den Ruthen vorhanden sind. Z. E. 6502846 Cubiczoll, sind 6° 502' 846'', oder 6 Cubicruthen, 502 Cubicschuhe, 846 Cubiczolle. Die Ursache ist leicht zu begreiffen. Denn weil erst 1000 Cubiczoll auf einen Cubicschuh gehen, so gehört alles was unter 1000 ist, zu den Cubiczollen, und was über 1000 ist, zu den Cubicschuhen; eben so verhält sichs mit den Cubicschuhen in Absicht auf die Ruthen.

Wie viel Cubiczoll auf einen Cubicschuh, und wie viel Cubicschuh auf eine Cubicruthe gehen,

und warum man bey dieser Rechnung je drey und drey Zahlen im geometrischen Maas für die Zolle, Schuhe u. s. w. abschneiden müsse.

Wie ein Körper, der nicht gleich lang, breit und hoch seye, genannt und ausgemessen werde.

Tab. III. fig. 43.

§. 170. Wie wir nun nicht zweifeln, daß das bisherige unsern Lesern deutlich genug seye; so hoffen wir auch, daß das folgende ihnen faßlich seyn werde. Sie könnten vielleicht fragen: wie man einen Körper, dessen Breite, Länge und Höhen unterschieden seyen, ausmessen solle? Die 43. Figur stellet einen von dieser Gattung vor: Er soll 7′ lang, 4 breit und 3 hoch seyn; man wird also auf die unterste Fläche 4 . 7 Cubicschuhe hinstellen können; auf die zweyte wiederum so viel, und auf die dritte abermal so viel; folglich in allem 7 . 4 . 3 Cubicschuhe; so bekommen wir seinen Innhalt. Er wird also gefunden, wenn man die Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicirt. Einen solchen Körper heißt man ein Parallelepipedum. Ein jedes Parallelepipedum läßt sich durch die Diagonallinie in zween gleiche Theile theilen, wie aus der 43. Figur erhellet, in welcher die Linie CD das Parallelepipedum in zween gleiche Theile schneidet, deren Grundflächen Dreyecke sind; ihr Innhalt wird also die Hälfte von einem Parallelepipedo von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche seyn. Ein solches halbirtes Parallelepipedum heißt nun ein dreyeckigtes Prißma. Es giebt aber noch andere eckigte Figuren in der Stereometrie, welche unter schiefen Winkeln zusammen stosen, und

worin-

worinnen man die Cubicschuhe u.s.w. nicht so herum legen kann, wie in den beeden schon benamßten Körpern; dahero fragt man billig, wie man denn dißfalls die Sache angreiffen müsse? Wir helfen uns hier, wie in der Planimetrie, durch die Reduction, und verwandeln einen schief stehenden Körper in ein Parallelepipedum von gleicher Grundfläche und Höhe. Z. E. ein Körper, dessen beede Grundflächen Rhomboides sind, wird in ein Parallelepipedum verwandelt, dessen beede, das ist, die obere und untere Grundflächen, rechtwinklichte Vierecke sind: denn wenn man von beeden Körpern so viel mit der Grundfläche parallele Scheiben schneidet, als möglich ist, so wird man aus keiner mehr schneiden können, als aus der andern. Da nun diese Scheiben nach den Grundsätzen der Planimetrie gleich sind, so werden auch ihre Summen gleich seyn. Dieses nun deutlicher und auf einer andern Seite vorzutragen, müssen wir wissen, was ein Prißma ist. Wenn ein Vieleck oder Polygon sich selbst allezeit parallel nach einer gewissen Richtung bewegt, so entsteht ein Prißma; oder ein Prißma ist ein Körper, dessen zwo Grundflächen durch so viel Vierecke umschlossen werden, als die Grundflächen Seiten haben. Wenn demnach die Grundflächen Dreyecke sind, so wird der prißmatische

rische Körper die Hälfte eines Parallelepipedi von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche seyn, folglich durch drey Parallelogramma umschlossen werden; sind es Vierecke, so wird er durch vier, und sind es Fünfecke, so wird er durch fünf Parallelogramma umschlossen; u. s. w. Da nun ein jedes Polygon durch Diagonallinien in Dreyecke eingetheilt werden kann, so werden sich alle Prißmata in dreyeckigte Prißmata zerschneiden lassen; folglich lassen sich alle Prißmata wie das dreyeckigte, durch die Multiplication der Grundfläche in die Höhe ausmessen. Denn die Summe aller dreyeckigten Prißmaten, aus welchen ein gegebenes vieleckigtes besteht, ist der Innhalt von dem gegebenen Prißma, das ist, das Product der ganzen Grundfläche in die Höhe; und weil die Höhe nach Perpendicularlinien abgemessen wird, so sieht man leicht, daß die Verwandlung angeht, und alle Prißmata von einerley Grundflächen und Höhen, einander gleich seyen, folglich eines für das andere, was die Grösse des Innhalts betrifft, gesetzet werden könne. Da man nun ferner einen Cylinder, das ist, einen Körper, dessen beede Grundflächen Cirkel sind, und welcher durch die sich allzeit parallele Bewegung einer Cirkelfläche entstehet, als ein Prißma von unendlich viel unendlich klei-

Wie ein Cylinder entstehe.

Tab. III. Fig. 47.

kleinen Seiten ansehen kann, so werden auch alle Cylinder nicht nur auf einerley Weise ausgemessen, sondern auch wenn sie von gleichen Grundlinien und Höhen sind, einander gleich seyn. Eben das müssen wir von den Pyramiden und conischen Körpern oder sogenannten Kegeln sagen. Diese entstehen, wenn ein Dreyeck sich um seine Grundlinie herumbewegt, jene aber, wenn eine eckigte Grundfläche durch so viel oben zusammen gehende Dreyecke umschlossen wird, als die Grundfläche Seiten hat. Folglich kann auch ein conischer Körper als eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche unendlich viel unendlich kleine Seiten hat. Und weil eine jede Pyramide als der dritte Theil eines Prißma von gleicher Grundlinie und Höhe betrachtet werden kann, so wird der conische Körper oder der Kegel ebenfalls der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche seyn. Jenes kann man einem augenscheinlich beweisen, wenn man sich ein dreyeckigtes Prißma von Holz machen läßt, und selbiges hernach wirklich durch die Diagonallinien schneidet, daß gerade drey Pyramiden heraus kommen, welche einerley Grundlinie und einerley Höhen haben, folglich alle einander gleich sind; dieses wird der Verstand aus der Aehnlichkeit schliessen, indem er einen

Wie die Pyramiden und Kegel oder conische Körper entstehen.

Tab. III. Fig. 45. 46. 47.

Eine Pyramide ist der dritte Theil eines Prißma von gleicher Höhe und Grundfläche.

Eben so ist ein Conus

der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche.

nen jeden Kegel als eine Pyramide betrachten, dahero er auch die Folge hinzudenken kann, daß er der dritte Theil vom Cylinder seye, wie die Pyramide der dritte Theil vom Prißma; welches letztere der Einbildungskraft gleichsam vor die Augen hingeschnitten, nicht aber so leicht hingemahlet werden kann. Da nun das Maas eines Prißma und eines Cylinders das Product der Grundfläche in die Höhe ist, so wird das Maas einer Pyramide und eines Kegels der dritte Theil von diesem Product, oder, welches gleichviel ist, das Product der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe seyn.

Was ein abgekürzter Conus seye, und wie er ausgemessen werde.

Weil es endlich auch abgekürzte Kegel giebt, dergleichen einen die 48. Fig. weiset, so wird man solche nicht weniger ausmessen können, wenn man nur bedenkt, daß der abgekürzte Kegel ADFH die Differenz zwischen dem grossen Kegel AEH und dem kleinen DEF, oder daß ADFH = AEH — DEF seye. Woferne ich nun diese zwey Kegel aus den gegebenen Grundflächen und Höhe des abgekürzten Kegels finden kann, so kann ich den Innhalt des abgekürzten Kegels selbst bald finden. Das ist uns sehr leicht. Denn wenn man die Linie DB mit GC parallel ziehet, so wird seyn

$$AB : BD = AC : CE.$$

AB ist die Differenz der halben Durchmes-

messer von den gegebenen beeden Grundflächen; BD die gegebene Höhe, und AC der halbe Durchmesser von der grössern Grundfläche; folglich ist CE die Höhe des ganzen Kegels in bekannten Grössen gefunden, nemlich $\frac{AC . BD}{AB}$ =CE, und weil EG, die Höhe des kleinen Kegels = EC — GC, so ist auch diese bekannt. Weil man nun über diß die beede Grundflächen weiß, so darf man nur jede in dem dritten Theil ihrer correspondirenden Höhe multipliciren, und das kleinere Product vom grössern abziehen, so wird die Differenz der gesuchte Innhalt des abgekürzten Kegels seyn.

Die Archimedeische Erfindung vom Innhalt der Kugel.

§. 171. Wir kommen nun auf die wichtige Frage von dem Innhalt einer vollkommenen Kugel oder Sphäre. Diese nun werden wir am besten auflösen können, wenn wir uns vorstellen, die Kugel entstehe durch die Bewegung oder Umwälzung eines halben Cirkels um seinen Diameter; der Cylinder aber durch die Bewegung oder Umwälzung eines Parallelogrammi um eine seiner Seiten; wie der Conus durch die Umwälzung eines Dreyecks auf gleiche Weise entstehet. Dieses vorausgesetzt, müssen wir uns zugleich erinnern, daß sich die Cirkelflächen wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten; demnach werden auch zween Cylinder

der von gleicher Höhe sich wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten. Denn der eine Cylinder solle C der andere c seyn, die beederseits gleiche Höhe aber a, und die Grundfläche von C solle B, die von c hingegen b heissen. So wird $C = Ba$ und $c = ba$, folglich

$$C : c = Ba : ba \quad \text{demnach}$$
$$\overline{\qquad\qquad} : a$$
$$C : c = B : b$$

Weil nun die Grundflächen der Cylinder Cirkel sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer Diameter, die wir D und d nennen wollen: demnach ist

$$D^2 : d^2 = B : b \quad \text{und}$$
$$\text{weil } C : c = B : b$$
$$\overline{\qquad\qquad} \text{ so ist}$$
$$C : c = D^2 : d^2$$

Die Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter.

das ist, die Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter, oder auch wie die Quadrate ihrer halben Diameter; dann ich darf nur mit 4 dividiren, so hat man $C : c = \frac{D^2}{4} : \frac{d^2}{4}$ das heißt, die Cylinder dieser Art verhalten sich, wie die Quadrate der halben Diameter. Wenn man nun wissen will, was das Maas der Kugel seye, so muß man sie mit einem Cylinder vergleichen, dessen Höhe der Diameter der Kugel, und dessen

sen Grundfläche ein Cirkel von gleichem Diameter ist. Die 48. Figur stellt ein solches Verhältniß vor. Denn CDAB ist ein Quadrat, welches durch seine Umwälzung um CD einen Cylinder beschreibt, dessen Höhe CD = CB, der halbe Diameter der Grundfläche und zugleich der halbe Diameter der Kugel ist, welche durch die Umwälzung des Quadranten DGB um DC entsteht. Woferne man nun die Diagonallinie CA vollends ziehet, so wird zu gleicher Zeit, wenn sich DABC um DC, und DGB um DC wälzet, auch das Dreyeck DAC um DC gewälzet werden, und durch diese Umwälzung einen Kegel beschreiben; folglich entsteht durch eine Umwälzung ein Cylinder, eine halbe Kugel und ein Kegel zugleich, welche alle einerley Höhen und Grundflächen haben. Nun ziehe man eine Parallellinie EH, und bemerke die Durchschnitte, welche sie mit der Diagonallinie und dem Cirkelbogen macht, durch Punkte, z. E. F und G; so wird EF ein Durchschnitt vom Kegel, EG ein Durchschnitt von der Kugel und EH ein Durchschnitt vom Cylinder seyn. Wissen wir nun, wie sich diese drey Durchschnitte zu einander verhalten, so wissen wir auch, wie sich die Kugel und der Cylinder zu einander verhalten; weil wir einerley Verhältniß herausbringen werden, wir mögen

Tab. III. fig. 48.

Die Verhältniß der Kugel zum Cylinder von gleicher Höhe und Dicke.

Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ vom Cylinder, der gleich hoch und dick mit ihr ist.

den Punkt E in der Linie DC annehmen, wo wir wollen. Nun ist EF der halbe Diameter eines Cirkels im Kegel, EG der halbe Diameter eines Cirkels in der Kugel, und EH der halbe Diameter eines Cirkels in dem Cylinder; folglich werden sich alle diese Cirkel, oder alle diese Durchschnitte zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer halben Diameter, das ist, wie EF^2, EG^2 und EH^2. §. 157.

Erklärung und Beweis dieses Lehrsatzes.

Wenn wir nun bewiesen haben, wie diese Stücke gegen einander sich wirklich verhalten, so werden wir auch zugleich wissen, wie ihre Summen, oder alle mögliche Durchschnitte von dieser Art zusammen genommen, das ist der Kegel, die Kugel und der Cylinder sich zu einander verhalten; weil das Ganze seinen Theilen zusammen genommen gleich ist. Dieses nun zu bewerkstelligen, muß man die Linie CG ziehen; welche als ein Radius den Linien CD und CB, und weil EH und CB parallel gezogen, auch EH gleich seyn wird. Nun ist aus dem Pythagorischen Lehrsatz bekannt, daß

$$CG^2 = CE^2 + EG^2$$

weil nun gleiches für gleiches gesetzt werden darf, und $CG^2 = EH^2$

so ist auch $EH^2 = CE^2 + EG^2$ nr. I.

Weil

Weil ferner $CD : DA = CE : EF$
und im Quadrat, $CD : DA = 1 : 1$

so ist $CE : EF = 1 : 1$
das ist, weil $1 = 1$, $CE = EF$, demnach
$CE^2 = EF^2$ nr. II.

folglich dürfen wir für CE^2 in der obigen Gleichung nr. I. setzen EF^2;

dann weil $EH^2 = CE^2 + EG^2$ nr. I.
und $CE^2 = EF^2$

so ist $EH^2 = EF^2 + EG^2$
$EF^2 = EF^2$ subtr. §. 9.

$EH^2 - EF^2 = EG^2$
folgl. auch die Sum. $EH^2 - f. EF = f. EG^2$ nr. III.
das ist, Cylinder—Conus = Kugel.
Nun ist Conus = $\frac{1}{3}$ Cylind.

folglich

Cylinder—$\frac{1}{3}$ Cyl. = Kugel, das heißt
$\frac{3}{3}$ Cylind.—$\frac{1}{3}$ Cyl. = $\frac{2}{3}$ Cylind. = Kugel.

Warum der gegebene Beweis richtig und allgemein seye.

Denn es wird niemand befremden, daß wir nr. III. sagten, die Summe von allen EH^2 — die Summe von allen EF^2 seye der Summe aller EG^2 gleich; wer aber daran zweifelt, darf den Beweis nur etlich 100 mal machen, oder etlich 100 Punkte in DC annehmen, so wird er sehen, daß allemal einerley herauskommt. Hernach bedenke man nur, daß die Summe aller Cirkelscheiben im Kegel den Kegel, und die Summe aller Cirkelscheiben in der Ku-

 gel

gel die Kugel, und die Summe aller Cirkelscheiben im Cylinder den Cylinder bestimmt; in welchem Fall man nicht umhin kann, auch zu sagen, daß die Summen der angeführten Quadrate ein gleiches Maas bestimmen, weil die angegebenen Cirkel sich alle wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten, folglich diese für jene gesetzt werden können. Nun wird alles deutlich seyn; und der archimedeische Lehrsatz ist erwiesen, **daß nemlich die Kugel allemal $\frac{2}{3}$ vom Cylinder seye, der einerley Höhe und Grundfläche oder Weite mit ihr hat.** Diese Weite nun nennt man bey einer Kugel den grössten Cirkel, dessen Durchmesser durch den Diameter der Kugel durchgeht. Denn bey einer Kugel giebt es allerhand cirkelförmige Durchschnitte, welche bald groß bald klein sind; gehen sie nun durch den Mittelpunkt der Kugel durch, so sind es die größte Durchschnitte der Kugel, und folglich auch die größte Cirkelflächen, die man aus der gegebenen Kugel schneiden kann. **Archimedes**, der Erfinder von dem angeführten Lehrsatz, daß nemlich die Kugel $\frac{2}{3}$ vom Cylinder gleicher Höhe und Grundfläche sey, war in diese seine Erfindung so verliebt, daß er die Figur davon auf sein Epitaphium zu stechen verordnet haben solle. Die Erfindung selbst ist in der That auch von grossem Gewich-

Was der größte Cirkel einer Kugel seye;

te

te, und zeuget von einer nicht gemeinen Scharfsinnigkeit. Es lassen sich noch verschiedene Folgen daraus herleiten, die wir jetzo vollends anführen wollen.

Die Kugeln verhalten sich zu einander wie die Cubi ihrer Diameter.

§. 172. Eine von den ersten Folgen ist diese, daß sich die Kugeln oder Sphären zu einander verhalten wie die Cubi ihrer Diameter. Denn wenn der Diameter 100′ ist, so ist sein Cubus 100. 100 . 100 = 1000000′, und die Kugel wird seyn $\frac{2}{3}$ vom Cylinder, dessen Höhe 100′ und dessen Grundfläche ein Cirkel ist, der zum Diameter auch 100′ hat, wie aus §. 171. erhellet. Die Grundfläche wird also nach §. 156. seyn 314.25 = 7850; und wenn man sie mit der Höhe = 100 multiplicirt, so wird 7850. 100 = 785000 der Innhalt des Cylinders seyn §. 170. Wenn ich nun dieses Product mit $\frac{2}{3}$ multiplicire, so habe ich den Innhalt der Kugel §. 171.

folglich ist 785000. $\frac{2}{3}$ = 523333$\frac{1}{3}$

der Innhalt der Kugel; demnach ist

Cubus Diam: Sphär = 1000000 : 523333$\frac{1}{3}$

und weil eine Verhältniß mit einer dritten Zahl z. E. mit 3 multiplicirt einerley bleibt,

so ist ——————————————— . 3

Cubus Diam : Sphär = 3000000 : 1570000,

——————————————— : 10000

 das

das ist, wenn die Verhältniß mit 10000 dividirt wird,

Cubus Diam : Sphär = 300 : 157.

Ein Ausdruck, den man, wenn man in der Uebung etwas thun will, auswendig lernen muß. Denn weil alle Kugeln eben so wohl als die Cirkel einander ähnlich sind, so ist die Verhältniß allgemein, und läßt sich auch auf alle Sphären oder Kugeln anwenden. Eine andere Folge ist nicht weniger wichtig. Sie bestehet darinnen, daß die Oberfläche einer Kugel dem viermal genommenen größten Cirkel der Kugel gleich sey. Denn ich kann die Kugel als eine Pyramide ansehen, deren Spitze in dem Mittelpunkt sich endiget, und deren Grundfläche die ganze Oberfläche der Kugel ist. Die Phantasie wird sich dieses vorstellen können, wenn sie nur die Kugel in Gedanken so auseinander legt, daß die in dem Mittelpunkt zusammen gehende Pyramiden von unendlich kleinen Grundflächen ihre Spitzen über sich kehren, und hernach in eine einige verwandelt werden, deren Grundfläche die Summe aller kleinen Grundflächen, und deren Höhe der Radius der Kugel ist. Ihr Innhalt wird also seyn die Grundfläche in den dritten Theil des Radius §. 170. oder in den sechs-

Die ganze Oberfläche der Kugel ist der viermal genommenen Fläche des größten Cirkels gleich.

sechsten Theil des Diameters multiplicirt; das ist, das Product der ganzen Oberfläche der Kugel in den sechsten Theil ihres Diameters. Demnach wird es folgende Rechnung geben, wenn wir den größten Cirkel circ. max. nennen: denn es ist

Erklärung und Beweis.

Circ. max. × diam = Cylind. Folglich

———————————— . $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ Circ. max × diam = Cylind.

Kugel = $\frac{2}{3}$ Cylind. §. 171.

$\frac{2}{3}$ Circ. max × diam = Kugel.

$\frac{1}{6}$ diam. × Oberfläche der Kugel = Kugel.

$\frac{2}{3}$ Circ. max × diam = $\frac{1}{6}$ diam. × Oberfl. der Kugel.

———————————— . 6

$\frac{12}{3}$ Circ. max. × diam. = diam. × Oberfläche der Kugel

———————————— : diam.

$\frac{12}{3}$ Circ. max = Oberfläche der Kugel

das ist, wenn man wirklich dividirt: 4 Circ. max = Oberfl. der Kugel.

Da nun der größte Cirkel gefunden wird, wenn man seine Peripherie mit dem vierten Theil des Diameters multiplicirt, so wird die ganze Oberfläche der Kugel gefunden, wenn man die Peripherie des größten Cirkels mit dem ganzen Diamemer multiplicirt. Und wenn ich dieses Product nochmalen mit dem sechsten Theil

Wie man aus dem gegebenen Diameter der Kugel ihre Oberfläche und ihren Innhalt finden könne;

des Diameters multiplicire, so habe ich den cubischen Innhalt der ganzen Kugel. Man kann also aus dem gegebenen Diameter der Kugel sowohl ihre Oberfläche als ihren cubischen Innhalt finden. Wenn man also die Peripherie des größten Cirkels p und den Diameter d nennet, so ist die Kugelfläche allemal dp, und folglich der cubische Innhalt der Kugel selbst $dp \cdot \frac{1}{6}d = \frac{1}{6}d^2p$. Wenn ich nun diese Kugel in einen Cylinder verwandeln solle, dessen Höhe mir gegeben und a genannt wird, so darf ich nur den Diameter des verlangten Cylinders suchen, welchen wir x nennen wollen; nun suchet man zuerst die Peripherie der Grundfläche des Cylinders, welcher, weil alle Peripherien des Cirkels zu ihren Diametern einerley Verhältniß haben, $\frac{px}{d}$ seyn wird. Indeme

und wie sich eine Kugel in einen Cylinder verwandeln lasse.

$d : p = x : \frac{px}{d}$; folglich ist die Grundfläche selbst $\frac{px^2}{4d}$ und der körperliche Innhalt des Cylinders, welcher durch die Multiplication der Grundfläche in die Höhe a entstehet, $\frac{apx^2}{4d}$; demnach muß nach der Bedingung der Aufgabe seyn

$\frac{1}{6}d^2p$

$$\frac{1}{6}d^2p = \frac{apx^2}{4d}$$

$$\overline{} \cdot 4d$$

$$\frac{4}{6}d^3p = apx^2$$

$$\overline{} \cdot p$$

$$\frac{4}{6}d^3 = ax^2$$

$$\overline{} : a$$

$$\frac{4d^3}{6a} = x^2 \text{ oder}$$

$$\frac{2d^3}{3a} = x^2 \text{ folglich}$$

$$3a : 2d = d^2 : x^2$$

Wie man eine Kugel in einen Conus und einen Conus wiederum in eine Kugel verwandeln könne u. s. w.

Dergleichen Aufgaben gibt es nun die Menge; so kann man z. E. eine Kugel in einen Conus, und einen Conus in eine Kugel verwandeln. Denn wenn die Grundfläche eines Kegels $\frac{pd}{4}$ und seine Höhe a ist, so wird der cubische Innhalt seyn, $\frac{adp}{12}$; und wenn der Diameter der ihme gleich zu machenden Kugel x heißt, so ist ihr Innhalt $\frac{px^3}{6d}$; weil $d : p = x : \frac{px}{d}$ die Peripherie des größten Cirkels; welche mit dem Diameter x multiplicirt die Oberfläche der Kugel $\frac{px^2}{d}$ giebt, und diese mit dem sechsten Theil des Diameters x multipli-

cirt den cubischen Innhalt $\frac{px^3}{6d}$ bestimmt. Folglich muß nach der Bedingung des Problems seyn

$$\frac{1}{12}adp = \frac{px^3}{6d}$$

$$\overline{} \cdot 6d$$

$$\frac{6}{12}ad^2p = px^3 \quad \text{das ist}$$

$$\frac{1}{2}ad^2p = px^3$$

$$\overline{} : p$$

$$\frac{1}{2}ad^2 = x^3$$

$$\overline{} \sqrt[3]{}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}ad^2} = x.$$

Ob und warum man eine Kugel nicht auch in einen vollkommenen Cubus verwandeln könne?

§. 173. Fragt man aber, ob man eine Kugel nicht auch in einen vollkommenen Cubus verwandeln könne, so müssen wir mit nein antworten: dann die Cubatur der Kugel ist bis jetzo noch so wenig erfunden worden, als die Quadratur des Cirkels. Hingegen das Delphische Problem, welches die Meßkünstler des alten Athens so lange Zeit vergebens gesucht haben, ist aus dem bisherigen leicht aufzulösen.

Von dem Delphischen Problem einen Cubus zu verdoppeln;

Der heidnische Apollo wurde um Abwendung der Pest von den Atheniensern angerufen; Er versprach zu helfen, woferne man seinen Altar zu Delphi, welcher ein vollkommener Cubus war, verdoppeln oder einen neuen Altar machen würde, der gerade noch einmal so groß, und doch wie der vorige abermal ein voll-

kom-

kommener Cubus wäre. Dieses Proplem gab nun Griechenland allen seinen Weisen auf; vermuthlich steckten es die Meßkünstler selbst hinter die Delphische Priester, damit der Ausspruch des Apollo alle Gelehrten in der Welt dazu aufmuntern möchte. Man wollte die Sache mit einer geometrischen Zuverläßigkeit und nicht mechanisch ausmachen; da es aber den meisten zu schwer fiele, so blieb das Problem lange unaufgelößt. Eratosthenes, ein Bibliothecarius zu Alexandrien, und der berüchtigte Hippocrates, von dem wir ein quadrirtes Stück des Cirkels haben, verfielen zuerst auf die Gedanken, daß das Problem von der Erfindung zwoer mittleren Proportionallinien zwischen zwo gegebenen Zahlen abhange. Das wollen wir jetzo beweisen. Es seyen zween Cubi, davon der eine B nochmalen so groß seyn solle, als der erstere, den wir A nennen. Die Seite des Cubus A heisset man a, demnach wird der Innhalt a^3 seyn; die Seite des Cubus B sey x, so wird sein Innhalt x^3 seyn. Da nun B nochmalen so groß als A, so wird nach der Bedingung des Problems seyn

Wie und warum diese Aufgaben von Erfindung zwoer mittlern Proportionallinien abhange;

$$x^3 = 2a^3 \text{ folglich}$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

Auflösung und Beweis des Delphischen Problems von

Daß nun $a\sqrt[3]{2}$ nichts anders seye, als die

Verdopplung des Cubus.

die erstere oder kleinere von zwo mittleren Proportionalzahlen zwischen a und 2a, wird sich leicht zeigen. Denn es seye die erste mittlere Proportionalzahl x und die andere y, so ist $a : x = y : 2a$, demnach weil die Proportion continuirlich ist, hat man

nr. I. $a : x = x : y$ und $x : y = y : 2a$

$$ay = x^2 \qquad 2ax = y^2 \text{ nr. II.}$$

$$y = \frac{x^2}{a}$$

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2}$$

$y^2 = 2ax$ nr. II. folglich §. 9.

$$\frac{x^4}{a} = 2ax$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot a^2$$

$$x^4 = 2a^3x$$

$$\overline{\qquad\qquad} : x$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$\overline{\qquad\qquad} : \sqrt[3]{}$$

$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$; dieses aber ist die Seite des doppelten Cubus; dahero ist sie auch die erstere mittlere Proportionalzahl von den zwo gesuchten mittleren Proportionalzahlen zwischen a und 2a, oder zwischen der einfachen und doppelten Seite des erstern Cubus *A*.

§. 174.

§. 174. Wir müssen auch was von den sogenannten regulairen geometrischen Körpern sagen. Zu dem Ende bestimmen wir vorhero den Begriff eines körperlichen Winkels. Wenn drey oder mehr Flächen in einem Punkt unter einer gewissen Neigung zusammen stosen, so heißt man den daraus entstehenden Winkel einen körperlichen Winkel. Ein solcher Winkel kann niemalen völlig 360° halten, sonst wäre es kein Winkel, sondern würde in eine Breite und ebene Fläche fallen. Er muß demnach allemal weniger als 360° in sich begreiffen. Da nun ein regulairer geometrischer Körper derjenige ist, der entweder in lauter gleichseitige Dreyecke, oder Vierecke oder überhaupt Vielecke eingeschlossen ist; so fragt man billig, wie viel es solche regulaire geometrische Körper gebe? Wir werden bald hören, daß es deren nicht weiter als fünfe giebt: denn ein körperlicher Winkel muß kleiner als 360° seyn. Da man nun wenigstens drey Flächen zu einem körperlichen Winkel braucht, so wollen wir den Anfang mit dem gleichseitigen Dreyeck machen, und sehen, wie viel regulaire Körper durch Dreyecke entstehen können. Der Winkel im gleichseitigen Dreyeck ist 60°; folglich wird man drey Körper durch dergleichen Dreyecke aufbauen können: denn

Was man unter den regulairen geometrischen Körpern verstehe, und was ein körperlicher Winkel seye; wie viel es regulaire geometrische Körper gebe.

3.60

und warum man deren nicht weiter als fünfe zehlen könne?

$3 \cdot 60 = 180°$ und giebt den Winkel des Tetraedri;
$4 \cdot 60 = 240°$ und giebt den Winkel des Octoedri;
$5 \cdot 60 = 300°$ und giebt den Winkel des Icosaedri;
$6 \cdot 60 = 360°$ ist schon zu groß, und giebt eine Fläche und keinen körperlichen Winkel mehr.

Ferner der Winkel im Quadrat ist 90°; da nun

$3 \cdot 90 = 270°$, so bekommt man den Winkel des Hexaedri oder Cubi;

$4 \cdot 90 = 360°$ ist schon zu groß, und giebt keinen körperlichen Winkel mehr, dahero aus dem Quadrat nur ein einiger regulairer Körper sich bauen läßt. Der Winkel im Fünfeck hält 108°; wir wollen sehen, ob dieser zu einem körperlichen Winkel der regulairen Körper was beyträgt? wenn er mit 3 multiplicirt noch kleiner ist als 360°, so wird er dazu sich schicken. Die Sache verhält sich auch wirklich also, dann

$3 \cdot 108° = 324°$, und giebt den körperlichen Winkel des sogenannten Dodecaedri.

Hingegen $4 \cdot 108 = 432$ ist schon um vieles zu groß, und giebt keinen körperlichen Winkel mehr Eben so wenig geht es mit dem Sechseck an, denn sein Polygon-

gonwinkel ist 120°, und 3 . 120 ist schon 360°; folglich giebt das Sechsecke keinen regulairen Körper, und noch vielweniger das Siebeneck, u. s. w. weil sein Winkel noch grösser ist. Die regulaire Körper sind also fünf; nemlich drey lassen sich aus dem Dreyeck, einer aus dem Viereck, und einer aus dem Fünfeck erbauen. Hingegen irregulaire Körper giebt es die Menge. Wann sie gar nichts regulaires an sich haben, und man will sie doch messen, so kann man ihren Innhalt einiger massen finden, wenn man einen Cubus mit Wasser füllt, und bemerkt, wie hoch das Wasser darinnen steht, sodann den irregulairen Körper hinein legt, und abermal die Höhe des aus der Stelle getriebenen und empor gestiegenen Wassers beobachtet. Die Differenz der beeden Höhen wird den Innhalt des Körpers bestimmen. Diß aber ist praktisch. Man begreifft von selbst, daß man ein anders Mittel ausfinden müsse, wenn man den Körper nicht naß machen darf; dahero einige auch Sand angerathen haben. u. s. w. Alles dieses gehört in die praktische Geometrie, mit deren wir uns dißmalen nicht beschäfftigen. Da wir nun in der Theorie nichts vergessen oder zurückgelassen, so eilen wir jetzo zum folgenden, und werden nunmehro auch die Grundsätze der Trigonometrie vortragen.

Kurze Anzeige, wie man ganz irregulaire Körper praktisch ausmessen, und ihren Innhalt finden könne.

II. Cap.

Zweytes Capitel.

Von Ausmessung der Dreyecke insbesondere, oder von der ebenen Trigonometrie.

§. 175.

Warum man von den Dreyecken und deren Maas noch besonders handle.

Die Lehre von den Dreyecken ist so fruchtbar, daß sie noch einen besondern Theil der geometrischen Wissenschaften ausmachen kann. Wir haben zwar in dem vorigen Capitel schon gezeigt, wie man ihre Flächen genau ausmessen, und auch den Umfang finden könne, wenn einem der Innhalt nebst der Grundlinie und Höhe gegeben ist. Allein es giebt oft Dreyecke, davon wir nichts als etwa eine Linie und ein paar Winkel wissen u. s. w. Dahero in alleweg nöthig ist, daß wir auch zeigen, wie man dißfalls die übrige Linien der Dreyecke finden könne. Die Wichtigkeit dieser Lehre erhellet unter anderm auch daraus, weil man nicht um alle Dreyecke, die man messen will, herumgehen kann, indeme manche sich oft an dem entferntesten Fixstern endigen, und zur Grundlinie den Diameter der ganzen Erdbahn haben. Da wir nun die Art und Weise, wie man

man auch die unbekannte Theile solcher grossen Dreyecke aus einigen bekannten Theilen finden solle, noch nicht umständlich vorgetragen, und es doch der Mühe werth ist, daß man so grosse und unzugängliche Zwischenweiten, z. E. von der Erde bis an die Sonne, oder an die noch weiter abstehende Sterne, u. s. w. zu bestimmen wisse; so werden unsere Leser schon jetzo vorläuffig von dem Nutzen derjenigen Wissenschaft überzeugt werden, deren Anfangsgründe wir gegenwärtig vortragen. Sie heißt mit einem Wort die **Trigonometrie** oder die Kunst Dreyecke auszumessen, und lehret uns, wie man aus drey gegebenen Theilen eines Dreyecks, worunter aber allemal wenigstens eine Seite seyn muß, die übrige drey Theile finden solle. Diese Erklärung wird man leicht begreiffen. Denn ein jedes Dreyeck hat drey Seiten und drey Winkel; drey Winkel nun bestimmen ein Dreyeck noch nicht. §. 165. Folglich würde die Aufgabe, aus drey gegebenen Winkeln das Dreyeck selbst zu finden, eine unbestimmte Aufgabe seyn. §. 127. Da aber entweder drey Seiten, oder zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und zween Winkel ein Dreyeck bestimmen, §. 144. so siehet man schon, woher es komme, daß wir sagen, aus drey gegebenen Stücken könne

Vorläuffige Anzeige von dem Nutzen dieser Lehre;

Erklärung der Trigonometrie;

Warum unter den drey gegebenen Stücken eines Dreyecks allemal eine Seite seyn müsse;

 man

man die übrige finden, und unter diesen Stücken müsse nothwendig eine Seite gegeben werden. Da nun ferner die Dreyecke entweder geradlinicht oder krummlinicht sind, so theilet sich die Trigonometrie von selbsten in zween Theile, davon der eine die geradelinichte, der andere aber die krummlinichte und vorzüglich die sphärische Trigonometrie in sich begreifft. Weil aber die letztere nur in der Astronomie gebraucht wird, folglich als ein Theil der Astronomie angesehen werden kann, so dürfen wir uns mit einer umständlichen Erklärung derselben nicht beschäfftigen; wenn man nur, wie aus der 56. Fig. erhellet, überhaupt einen Begriff von sphärischen Dreyecken, deren Seiten Cirkelbögen sind, sich bilden kann. Dann daß sie nach andern Regeln als die geradelinichte Dreyecke, sich richten, wird in der Astronomie erwiesen. So halten z. E. in einem jeden sphärischen Dreyeck alle drey Winkel zusammen mehr als 180°, und können dahero nicht nur zwey, sondern auch drey rechte ja gar stumpfe Winkel hie statt haben u. s. w. Dieses aber gehört nicht hieher. Die geradelinichte Trigonometrie breitet ihren Nutzen nicht blos über die astronomische, sondern über alle nur mögliche mathematische Wissenschaften aus. Darum verdienet sie in der Lehre von den ersten

Es giebt eine geradelinichte und krummlinichte Trigonometrie.

Kurze Anzeige von der letztern oder sphärischen Trigonometrie,

Tab. III. Fig. 56.

Warum man vorzüglich die geradelinichte Trigonometrie abhandle und die krummlinichte hie übergehe.

sten

sten Gründen aller mathematischen Wissenschaften einen vorzüglichen Platz.

§. 176. Wenn man von dem einen Schenkel EC eines Winkels ECA, auf dem andern Schenkel AC einen Perpendikel ED herunter fällt, so heißt dieser Perpendikel ED der Sinus des Winkels ECA und auch der Sinus des Bogens EA. Beschreibt man nun um einen solchen Winkel aus der Spitze C, die man zum Mittelpunkt annimmt, einen Cirkel, so wird man neben dem Sinus DE noch andere Linien ziehen können, welche in der Trigonometrie ihre eigene Namen haben. Der Sinus ED selbst kann noch auf einer andern Seite betrachtet werden: dann weil er auf AC perpendicular stehet, so wird er die Hälfte von der verlängerten Sehne GE seyn; und weil sich in dem Nebenwinkel ECF keine Perpendicularlinie von einem Schenkel zum andern ziehen läßt, als eben die auf den nach A verlängerten Schenkel CF herabgezogene Linie ED, so wird sie auch der Sinus des Nebenwinkels ECF, folglich des Bogens EF seyn. Also ist der Sinus eines jeden spitzigen Winkels auch der Sinus des stumpfen Nebenwinkels. Weil ferner die Schenkel eines rechten Winkels auf einander perpendicular stehen, so wird der Sinus des rechten Winkels mit dem einen oder dem andern Schenkel selbst zusammen

Tab. III. fig. 49. Erklärung der in der Trigonometrie vorkommenden Namen, was der Sinus sey, und wie man Tab. III. fig. 50. ihn auf einer doppelten Seite betrachten könne, der Sinus des spitzigen Winkels ist auch der Sinus des stumpfen Nebenwinkels;

Der Sinus des rechten Winkels ist der Radius, der deßwegen Sinus totus heißt.

men fallen, folglich im Cirkel der Radius seyn; dahero ist CR, der Radius, zugleich der Sinus des rechten Winkels ACR, und heißt deßwegen der Sinus totus, ein Name, den man sich vorzüglich bekannt machen muß. Endlich erhellet auch noch dieses, daß ein jeder Sinus die Hälfte derjenigen Sehne sey, welche dem doppelten Winkel am Mittelpunkt entgegen steht; dahero ist der Sinus totus die Hälfte der größten Sehne, nemlich des Diameters.

Was die Tangenten seyen,

Tab. III. Fig. 50.

§. 177. Wenn man an dem Ende des Radius AC eine Perpendicularlinie aufrichtet, oder überhaupt in dem Punkt A eine Parallellinie mit dem Sinus DE ziehet, so heißt die Linie AH, welche von dem nach H verlängerten Schenkel CE durchschnitten wird, die Tangente des Bogens AE und folglich auch des Winkels ACE; welchen Namen man abermal sich wohl bekannt machen muß, wenn man in der Trigonometrie einen guten Fortgang bekommen will. Hieraus siehet man nun sogleich, daß die Tangente von 45° dem Sinus totus gleich seyn müsse.

Die Tangente von 45° ist dem Radius, oder dem Sinus totus gleich.

Denn weil bey A allemal ein rechter Winkel ist, so ist, wenn der Winkel ACH = 45°, auch der Winkel AHC = 45°, §. 147. folglich AHC ein gleichschenklichtes Dreyeck §. 145. und dahero in diesem Fall AH = AC, oder dem

dem Radius, welcher allemal der Sinus totus ist. Es sind noch einige Linien, die man sich bekannt machen kann, wiewohlen sie nicht so wichtig sind, als die beede schon erklärte Linien. Wir wollen dahero nur kürzlich ihre Namen nennen. Die Linie HC, wodurch die Tangente in H durchschnitten und bestimmt wird, heißt die Secante (Secans); die Linie AD, der Sinus versus, die Linie DC = EK der Cosinus; SR die Cotangente (Cotangens) und CS die Cosecante; (Cosecans.) Unter diesen Linien ist vornemlich der Cosinus noch zu behalten, welcher durch den Sinus ED bestimmt und abgeschnitten wird; so ist in der 49. Fig. DC der Cosinus des Winkels ECA, wie es in der 50. Fig. DC vom Winkel DCE ist. Die Ursache, warum man diesen noch wissen muß, ist leicht begreifflich. Der Cosinus ist allemal der Sinus desjenigen Winkels, der mit dem gegebenen Winkel zusammen genommen 90° oder den Quadranten AER ausmacht, dahero er auch der Sinus complementi heißt: denn ECA + ECR=ACR. Da man nun aus dem gegebenen Sinus den Cosinus finden kann, wie wir sogleich zeigen werden, so darf man die Sinus nur bis auf 45° suchen, weil alle Sinus der Winkel, die über 45° halten, Cosinus derjenigen Winkel sind, die unter 45° sind. So ist der Sinus

Die Namen Secante, Sinus versus, Cosinus und Cotangens werden erklärt.

Warum man die Erklärung des Cosinus besonders zu merken habe.

Warum man die Sinus nur bis auf 45° suchen dürfe, und wie die übrige durch die

Cosinus bestimmt werden.

von 46° der Cosinus des Winkels von 44°, der Sinus von 60° ist der Cosinus des Winkels von 30°, der Sinus von 89° ist der Cosinus des Winkels von 1° u. s. w.

Warum man die Art und Weise, die Sinus zu berechnen, nicht weitläuftig vortrage.

§. 178. Nun hat man die Sinus von allen Graden nicht nur, sondern auch von den Minuten u. s. w. längstens berechnet; und diese mühsame Arbeit ist, um einen wohlfeilen Preiß gedruckt, zu haben. Wir werden dahero die Art und Weise der Berechnung selbst nicht weitläufftig vortragen. Doch ist nöthig, daß wir unsern Lesern einen Begriff von der Arbeit derjenigen geben, welche Jahr und Tage hindurch fast nichts anders thun mußten, als Sinus, Cosinus, Tangenten und Secanten berechnen. Man hat den Sinus totus 10000000 Theilgen groß angenommen, und gesucht, wie viel von diesen Theilen auf einen Sinus von so und so viel Graden, Minuten, Secunden u. s. w. gehen. Damit man nun die Sache so richtig berechnen konnte, als möglich war: so dachte man, die Seite des Sechsecks ist dem Radius gleich, und weil der Radius der Sinus totus ist, so ist sie auch diesem gleich. Da nun eine dieser Seiten als eine Sehne angesehen werden kann, und eine jede Sehne ein doppelter Sinus ist; so fand man leicht, daß der Sinus von 30°, oder der Hälfte des der Sehne am Mittelpunkt entgegen

Kurze Anzeige, wie die Sinus u. s. w. berechnet werden.

Der Sinus von 30° ist die Hälfte des Sinus totus.

stehenden Winkels, die Hälfte des Sinus totus seye. Aus diesem gefundenen Sinus, der $\frac{10000000}{2} = 5000000$ ist, hat man dann den Sinus des halben und des doppelten Winkels u. s. w. gesucht, da sich immer neue Vortheile ergaben. Der Sinus von 45° wurde auf eine ähnliche Weise gefunden. Man zog die Sehne RF, welche nach den Lehrsätzen des vorigen Capitels §. 161. nichts anders ist als $\sqrt{RC^2 + CF^2}$; oder weil RC = CF, indem es Radii sind, $\sqrt{2RC^2}$, das ist, die Quadratwurzel aus dem doppelten Quadrat des Sinus totus. Diese zog man aus, und halbirte sie, dahero man den Sinus von 45° bekam, welcher der halben Sehne RF nach §. 176. gleich seyn muß. Den Cosinus z. E. DC fand man aus dem gegebenen Sinus ED, indem man sagte $EC^2 - ED^2 = DC^2$ folglich $DC = \sqrt{(EC^2 - ED^2)}$. Man quadrirte also den Sinus totus, und subtrahirte das Quadrat des gegebenen Sinus davon, sodann zog man aus dem Rest die Quadratwurzel aus u. s. w. Aus dem Sinus und Cosinus fand man die Tangenten, weil CD : DE = CA : AH, dahero die Tangente $AH = \frac{DE . CA}{CD}$ $= \frac{\text{sin. tot.} \times \text{sin.}}{\text{Cosin.}}$ u. s. w. Auf eine ähnliche

Wie der Sinus von 45° gefunden werde.

Tab. III. fig. 50.

Kurze Regel aus dem gegebenen Sinus den Cosinus zu finden,

wie auch hernach die Tangenten,

und Secanten u. s. w.

liche Weise ergab sich die Secante CH, indeme man sagte CD : CE = CA : CH, folglich, weil CE = CA, die Secante

$$CH = \frac{CA^2}{CD} = \frac{(\sin tot.)^2}{Cos.} \text{ u. s. w.}$$

Doch genug von diesem; unsere Leser sehen schon, wie mühsam diese Arbeit ist, unerachtet man übrigens nicht viel Nachsinnen dazu braucht.

Wie man aus dem gegebenen Sinus des einfachen Winkels den Sinus des zweyfachen, dreyfachen, u. s. w. finden könne.

Tab. III. Fig. 60.

§. 179. Es ist hierinnen, wie mit den Logarithmen, durch die gedruckte Tabulas Sinuum und Tangentium schon längstens allen denjenigen vorgeschafft worden, welche in der praktischen Trigonometrie sich üben wollen; dahero wir weiter nichts hinzusetzen, als daß wir nur noch zeigen, wie man den Sinus des doppelten, dreyfachen, vierfachen Winkels u. s. w. aus dem gegebenen Sinus des einfachen finden könne. Man giebt den Winkel ACD und seinen Sinus AD; nun solle man den Sinus des doppelten, dreyfachen u. s. w. suchen. Aus der Figur erhellet von selbst, daß CA der Sinus totus, wie z. E. in der 50. Fig. bey dem Winkel ECD auch EC der Sinus totus ist. Demnach wird auch CD der Cosinus seyn, $=\sqrt{(CA^2 - AD^2)}$; folglich läßt sich auch dieser finden. Nun verlängere man CD nach Belieben bis in G und CA bis in F, und ziehe die Linie AB

Tab. III. fig. 60.

= AC,

= AC, daß man das gleichschenklichte Dreyeck CAB bekomme; auf gleiche Weise bestimme man mit einerley Eröffnung des Zirkels die Linie BF = AB = AC, so wird sich das gleichschenklichte Dreyeck ABF ergeben; ferner mache man FG = FB = BA = AC, damit man noch ein gleichschenklichtes Dreyeck BFG bekomme u. s. w. In diesem Fall nun wird die von B auf CF gefällte Perpendicularlinie BE der Sinus des doppelten Winkels ACD, und die von F auf CG gefällte Perpendicularlinie FH der Sinus des dreyfachen Winkels ACD werden, u. s. w. Dieses wollen wir jetzo beweisen:

Auflösung und Beweis.

$r = n + o$ §. 147.
$n = o$ §. 145.

$r = n + n$
$2n = n + n$

$r = 2n$. Da nun
$\sin. r = EB$, so ist auch

$\sin. 2n = EB$.

Aus gleichem Grunde ist s der äussere Winkel von dem Dreyeck CBF, folglich so groß als $n + x$ zusammen ist; da nun $x = r$, weil das Dreyeck ABF gleichschenklicht ist, und $r = 2n$, wie wir erwiesen, so ist $s = n + 2n = 3n$; folglich FH der Sinus von s auch der Sinus von 3n. Oder in Zeichen:

$$s = n + x$$
$$r = x \quad \text{§. 145.}$$
$$s = n + r$$
$$2n = r$$
$$s = n + 2n \quad \text{das ist}$$
$$s = 3n.$$

Da nun

$$\sin. s = FH \quad \text{so ist auch}$$
$$\sin. 3n = FH.$$

Da nun ferner, weil bey D und E rechte Winkel sind, und n sich selber gleich ist, nach den Proportionsregeln

$$CA : AD = CB : BE \quad \text{das ist}$$

$\sin.tot : \sin = 2 \operatorname{Cosin} : BE$, so findet man den Sinus des doppelten Winkels

$$EB = \frac{\sin.\ 2 \operatorname{Cosin}.}{\sin.tot.},$$

wenn man nemlich den gegebenen Sinus des einfachen Winkels mit seinem doppelten Cosinus multiplicirt, und das Product durch den Sinus totus dividirt. Weil nun abermal aus gleichem Grunde $CA : CD = CB : CE$ folglich $CE = \frac{CD.CB}{CA}$, und $AE = CE$

$$-CA = \frac{CD\ .\ CB}{CA} - CA = \frac{CD.CB - CA^2}{CA}$$

folglich (weil $CB = 2CD$,)

$$= \frac{CD.2CD - CA^2}{CA} = \frac{2CD^2 - CA^2}{CA},$$

und (weil $CA^2 = CD^2 + AD^2$.) Der

letzte

letzte dem obigen aber vollkommen gleiche Ausdruck $\frac{2CD^2 - CD^2 - AD^2}{CA}$

$= \frac{CD^2 - AD^2}{CA}$. Nun ist $AE = EF$, weil die Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks durch die Perpendicularlinie BE in zween gleiche Theile getheilet wird; folglich wird

$EF = \frac{CD^2 - AD^2}{CA}$ und dahero

$$CF = CE + EF = \frac{CD.CB}{CA} + \frac{CD^2 - AD^2}{CA}$$

$$= \frac{2CD^2}{CA} + \frac{CD^2 - AD^2}{CA} = \frac{3CD^2 - AD^2}{CA.}$$

Nunmehro ergiebt sich leicht eine neue Proportion, CA : AD = CF : FH, das ist, wenn man den gefundenen Ausdruck für CF setzet,

$$CA : AD = \frac{3CD^2 - AD^2}{CA} : FH,$$

folglich ist FH der Sinus des dreyfachen Winkels $= \frac{3CD^2 . AD - AD^3}{CA^2}$ das ist, wenn man die Linien wirklich mit den trigonometrischen Namen beleget,

$$\frac{3(\sin. \times \operatorname{Cosin.}^2) - (\sin.^3)}{(\sin. \operatorname{tot.}^2)}$$

Oder, wenn der Sin. tot. = r der Sinus = s

$= s$ und der Cosinus $= c$ gesetzt wird, so hat man den Sinus des dreyfachen Winkels $= \frac{3sc^2 - s^3}{r^2}$. Nach eben diesen Regeln suchet man den Sinus des vierfachen Winkels u. s. w. Da sich dann eine Progression ergeben wird, welche die folgende ist:

Allgemeine Regel für den Sinus des vielfachen Winkels,

Der Sinus des einfachen Winkels seye $= s$

so ist der Sinus des zweyfachen $= \frac{2sc}{r}$

des dreyfachen $= \frac{3sc^2 - s^3}{r^2}$

des vierfachen $= \frac{4sc^3 - 4s^3c}{r^3}$

des fünffachen $= \frac{5sc^4 - 10s^3c^2 + s^4}{r^4}$

des sechsfachen $= \frac{6sc^5 - 20s^3c^2 + 6s^5c}{r^5}$

des siebenfach. $= \frac{7sc^6 - 35s^3c^4 + 21s^5c^2 - s^7}{r^6}$

Wenn man nun diese Progression mit dem Newtonischen Binomio §. 111. vergleicht, so wird man finden, daß der Sinus des vielfachen Winkels überhaupt durch einen allgemeinen Ausdruck seye

$$\frac{nc^{n-1}s}{r^{n-1}} - \frac{n.n-1.n-2\,c^{n\,3}s^3}{1.2.3.r^{n-1}} +$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4\,c^{n-4}s^4}{1.2.3.4.5\,r^{n-1}} \text{ u. s. w.}$$

Hingegen der Cosinus wird folgende Progression geben;

Wie auch für den Cosinus des vielfachen Winkels.

nemlich der Cosinus des einfachen Winkels $= c$

des zweyfachen $= \frac{c^2 - s^2}{r}$

des dreyfachen $= \frac{c^3 - 3s^2c}{r^2}$

des vierfachen $= \frac{c^4 - 6s^2c^2 + s^4}{r^3}$

des fünffachen $= \frac{c^5 - 10s^2c^3 + 5s^4c}{r^4}$ u. s. w.

Dahero der allgemeine Ausdruck für den vielfachen Cosinus ist $\frac{c^n}{r^{n-1}} -$

$$\frac{n.n-1.c^{n-2}s^2}{1.2\,r^{n-1}} + \frac{n.n-1.n-2.n-3\,c^{n-4}s^4}{1.2.3.4\,r^{n-1}}$$

u. s. w. Diese Formeln lassen sich bey der Anwendung auf verschiedene Fälle noch kürzer ausdrucken; allein uns genüget, die allgemeine Regel angeführet und erwiesen zu haben. Man wird im folgenden fortkommen können, wenn man diesen ganzen Absatz überschlägt, welches wir

wir zum Behuf für die Anfänger, denen diese Auflösung zu mühsam scheinen möchte, noch hinzu sagen. Aus eben diesem Grunde wollen wir auch die allgemeine Regel für die Tangenten dißmalen übergehen. Im vierten Capitel werden solche Sätze vorgetragen werden, durch welche dergleichen Arbeiten ungemein erleichtert werden. Die Lehre von Erfindung der Sinus für die Minuten und Secunden, beruhet auf dem Satz, daß man einen so kleinen Bogen für eine gerade Linie ansehen könne; da dann hernach alles nach den Proportionsregeln ähnlicher Dreyecke bestimmt und gefunden wird.

Wie man die Sinus der Minuten und Secunden finde.

§. 180. Nun wollen wir zeigen, wie man durch Hülfe der Sinus und Tangenten die noch unbekannte Stücke der Dreyecke aus einigen gegebenen Theilen finden könne. Wir haben nur zween Sätze dazu nöthig, die wir jetzo erweisen wollen. Der erste ist der folgende: Die Sinus ähnlicher Bogen haben einerley Verhältniß zu ihren Radiis; das ist: GF : GC = ED : EC. Der Beweis ist leicht; bey D und F sind rechte Winkel; und der Winkel GCD ist sich selber gleich, folglich ist das Dreyeck GFC dem Dreyeck EDC ähnlich; demnach werden auch die gleichen Winkeln entgegen stehende Seiten proportionell seyn; das ist GF : GC = ED : EC. Hieraus siehet man,

Anwendung dieser Lehre auf die Erfindung der unbekannten Stücke eines Dreyecks;

wozu man nur zween Sätze nöthig hat,

Tab. III. Fig. 52.

der erste ist, daß die Sinus ähnlicher Bogen einerley Verhältniß zu ihren Radiis haben.

man, daß es gleichviel ist, ob ich den Sinus eines Winkels DCG von G oder von E herab ziehe, das ist einer nahen oder weiten Entfernung vom Scheitelpunkt oder von der Spitze des Winkels C suche: denn der Sinus ED ist so gut der Sinus des Winkels DCG als es der Sinus GF ist; indeme der Bogen AE in Absicht auf die Anzahl seiner Grade so groß ist als der Bogen GD; folglich muß auch der Sinus ED so viel Theile von seinem Sinus totus EC in sich begreiffen, als der Sinus GF von dem seinigen, nemlich von GC. Der Grund von diesem Satz ist schon anfangs gleich in der Geometrie vorgetragen worden, da wir gezeigt haben, daß es gleichgültig seye, ob man mit einer kleinen oder grossen Eröffnung des Zirkels einen Winkel messe.

Dahero es gleichgültig, ob man den Sinus des Winkels in einem grossen oder kleinen Cirkel suchet.

Der andere Fundamentalsatz, der zu wissen unumgänglich nöthig ist, heißt also: **In einem jeglichen Dreyeck verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus der den Seiten entgegen stehenden Winkel.** Durch Hülfe dieses wichtigen Satzes werden hernach alle trigonometrische Aufgaben nach der Regel Detri aufgelößt.

Zweyter Satz, daß in einem Dreyeck sich die Seiten zu einander verhalten wie die Sinus der den Seiten entgegen stehenden Winkeln.

Wir wollen jetzo den Satz selbst beweisen. Weil allemal durch drey Punkte ein Cirkel beschrieben werden kann, so kann auch um ein jedes Dreyeck, es mag beschaffen seyn, wie es will, ein

Tab. III. Fig. 51.

wird umständlich erkläret und bewiesen.

ein Cirkel beschrieben werden. Folglich wird, was von der 51. Fig. gesagt wird, von allen Dreyecken gelten. Wenn wir nun die Figur ansehen, so muß uns gleich aus der Geometrie einfallen, daß der Winkel o zu seinem Maas den halben Bogen BC hat, worauf er stehet; eben so wird m zu seinem Maas den halben Bogen AB, und n den halben Bogen AC haben. Nun fragt sichs, weil wir die Sinus wissen wollen, was die Sinus dieser halben Bögen seyen. Das muß uns nun ganz frisch noch im Gedächtniß seyn, daß der Sinus von dem halben Bogen BC die halbe Sehne BC, und der Sinus von dem halben Bogen AC die halbe Sehne AC, und der Sinus von dem halben Bogen AB die halbe Sehne AB seyen; sie werden es also auch von den Winkeln o, n und m seyn. Demnach müssen sich die Winkel zu einander verhalten wie die Sinus: diese aber sind die Hälften der entgegen stehenden Sehnen oder Seiten. Folglich verhalten sich die Sinus wie die halbe Sehnen oder Seiten, demnach auch wie die ganze Seiten. Das ist in Zeichen:

$o = \frac{1}{2} BDC$ und $m = \frac{1}{2} AGB$ folglich

$\sin. o = \sin. \frac{1}{2} BDC \quad \sin. m = \sin. \frac{1}{2} AGB.$

$\frac{1}{2} BC = \sin \frac{1}{2} BDC \quad \frac{1}{2} BA = \sin \frac{1}{2} AGB.$

$\sin. o = \frac{1}{2} BC. \quad \sin. m = \frac{1}{2} BA.$

Dem-

Demnach $\sin. o : \frac{1}{2}BC = \sin. m : \frac{1}{2}BA$
und $\sin. o : \sin. m = \frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}BA$

$\overline{} . 2$

folglich $\sin. o : \sin. m = BC : BA$.
Da nun die Seite BC dem Winkel o und die Seite BA dem Winkel m entgegen steht, so ist klar, daß sich in einem Dreyeck die Seiten zu einander verhalten, wie die Sinus der entgegenstehenden Winkel. Man begreifft ohne unser Erinnern, daß man eben dieses von den Winkeln o und n und den Seiten BC und AC auf gleiche Weise demonstriren könne. Wenn man sich diesen Satz recht bekannt macht, so wird man im folgenden keine Schwürigkeit mehr finden.

Aus dem bisherigen werden nun die trigonometrische Aufgaben bestimmt;

§. 181. Nunmehro können wir die gewöhnlichste und gemeinste trigonometrische Aufgaben erklären. Denn es sind noch verschiedene andere übrig, wozu man die Lehrsätze in meinem mathematischen Lehrbuch findet. Der erste und leichteste Fall ist, wenn man aus einer Seite und zween Winkeln, die einem gegeben werden, die übrige Stücke suchen solle. Den dritten Winkel darf ich nicht erst suchen, weil im geradelinichten Dreyeck der dritte Winkel allemal durch die nach Abzug der zween gegebenen Winkeln noch zu 180° fehlende Zahl bestimmt wird. Man sucht also nur die zwo Seiten; und sagt: wenn die Seite AC und die Winkel o und m gegeben,

Erster Fall, wie man aus zween Winkeln und einer Seite die übrige zwo Seiten eines Dreyecks finden solle.

Tab. III. Fig. 51.

 folg-

folglich auch der dritte Winkel n gegeben ist; so ist

$$\sin. n : AC = \sin. o : BC, \text{ daher}$$

$$\frac{AC . \sin. o}{\sin. n} = BC.$$

Das lößt man hernach logarithmisch auf, damit man nicht mit so grossen Zahlen multipliciren und dividiren darf; dahero diese Operation in eine Addition und Subtraction verwandelt wird. Folglich ist

$$\log. BC = (\log AC + \log. \sin. o) - \log. \sin. n.$$

Diese Logarithme sucht man in den gedruckten Tafeln, und nach geschehener Berechnung wird die dem Logarithmus von BC correspondirende Zahl in eben diesen Tafeln wiederum gesucht. Wenn also AC der Diameter der Erde wäre, und zween Astronomen beobachteten die Sonne zu gleicher Zeit, der eine am Ende A und der andere am Ende C; so würde, wenn sie die Winkel o und m, unter welchen sie die Sonne sahen, aufschreiben, die ganze Distanz oder Weite der Sonne von der Erde nach dem gemeldeten leichten Problem bestimmt und berechnet werden, unerachtet noch kein Mensch von der Erde in die Sonne gekommen ist. Daß sich übrigens von dieser Gattung unendlich viel praktische Aufgaben vorlegen lassen, ist ohne unser Erinnern klar; wir wollen uns daher nicht damit aufhalten.

Dieser leichte Fall wird durch ein Exempel erläutert.

§. 182.

§. 182. Der andere Fall ist, wenn zwo Seiten und ein daneben liegender Winkel, nicht aber der eingeschlossene Winkel, gegeben werden. Z. E. es seye gegeben AB, AC, und der Winkel n; so ist nach §. 180.

Zweyter Fall, wenn zwo Seiten und ein daneben liegender Winkel gegeben sind.

$$AC : \sin. n = AB : \sin. m.$$

folglich ist $\sin. m = \frac{\sin. n. AB}{AC}$

Wenn ich aber den Sinus des Winkels habe, so habe ich auch den Winkel; habe ich aber zween Winkel m und n, so habe ich auch den dritten o; will ich nun die Seite BC vollends wissen, so setze ich

$$\sin. n : AC = \sin. o : BC.$$

das ist $\frac{AC. \sin. o}{\sin. n.} = BC.$

oder logarithmisch

$$l. BC = (l. AC + l. \sin. o) - l. \sin. n.$$

Hieraus siehet man, daß in der Trigonometrie ein Dreyeck aus zwo Seiten und einem Winkel gefunden werden könne, wenn auch der Winkel schon nicht eingeschlossen ist. An und vor sich selbst wird ein Dreyeck durch zwo Seiten und einen anliegenden Winkel nicht bestimmt. Denn es seye gegeben der Winkel CAB, ferner die Linie CA und CB; so werde ich, wenn CAB ein spitziger Winkel ist, die Linie CB entweder in B unter einem stumpfen, oder in D unter einem spitzigen Winkel anbringen können, folglich entweder das Dreyeck

Warum und wie ferne man in der Trigonometrie aus zwo Seiten und einem darneben liegenden Winkel die übrige Stücke bestimmen könne, da man doch im ersten Capitel sagte, das

Tab. III. Fig. 58.

Dreyeck werde nur alsdann bestimmt, wenn die zwo Seiten den Winkel einschliessen?

wird umständlich beantwortet.

ACB oder ACD bekommen, in welchem Fall es also scheinet, daß die trigonometrische Aufgabe mich betrügen könne. Allein der Sinus des stumpfen Winkels ABC ist kein anderer, als der Sinus des spitzigen Winkels ADC: denn weil CB = CD nach der Bedingung, so ist n = r. Nun ist o der Nebenwinkel von n, folglich wird ers auch von r seyn; der Sinus eines stumpfen Nebenwinkels ist aber allemal so groß als der Sinus seines spitzigen Nachbars, weil zween Nebenwinkel einerley Sinus haben. Folglich fehlt die Trigonometrie hierinnen nicht. Nur muß man einem sagen, ob das Dreyeck, in diesem Fall, davon die Rede ist, spitzwinklicht oder stumpfwinklicht seye, weil sonst die gesuchte dritte Linie entweder zu groß oder zu klein würde. Ist es rechtwinklicht, so hat die Sache vorhin keine Schwürigkeit, wie aus der Figur und aus dem folgenden erhellen wird.

[illegible] Fall wenn zwo Seiten, die den rechten Winkel einschliessen, gegeben sind.

Tab. III. Fig. 57.

§. 183. Der dritte Fall heißt: wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck zwo Seiten, die den rechten Winkel einschliessen, gegeben sind, so solle man die übrige Winkel und Seiten finden. Die gegebene Seiten seyen AB und AC; folglich wird nach der Bedingung des Problems bey A ein rechter Winkel seyn. Wann ich nun die Seite AC für den Radius annehme, und den Bogen AD damit beschrei-

schreibe, so wird die andere Seite AB die Tangente des Winkels n seyn; demnach, weil der Radius der Sinus totus ist, giebt es folgende Proportion:

$$AC : AB = \text{sin.tot} : \text{Tangent.n.}$$

Dahero $\frac{AB\,\text{sin.tot.}}{AC} = \text{Tang.n.}$

Da man nun aus der gegebenen Tangente in den berechneten Tafeln der Sinuum und Tangentium den correspondirenden Winkel findet, so läßt sich auch diese Aufgabe auflösen; indeme man nun nach §. 187. fortfähret und sagt

$$\text{sin.n} : AB = \text{sin.tot} : BC.$$

Da dann $BC = \frac{AB.\,\text{sin.tot.}}{\text{sin.n.}}$

Vierter Fall, wenn zwo Seiten nebst einem spitzigen oder stumpfen Winkel, den sie einschliessen, gegeben sind.

Tab. III. Fig. 59.

§. 184. Ein anderer und etwas schwerer aufzulösender Fall ist derjenige, wenn einem zwo Seiten und der eingeschlossene spitzige oder stumpfe Winkel gegeben werden. Es seyen im Dreyeck BCF gegeben BC, BF und der eingeschlossene Winkel c; ich solle die zween übrige Winkel finden. Aus der Arithmetik wissen wir noch, daß man aus der halben Summe und aus der halben Differenz zweyer Grössen die Grössen selbst finden kann. Die halbe Summe der gesuchten Winkel ist bekannt, weil ihre ganze Summe bekannt ist: wir suchen dahero nun ihre Differenz; welche nichts anders seyn wird, als die halbe Summe weniger dem kleinern Winkel von

den gegebenen. Denn wenn die kleinere Grösse y heißt, und die Summe a, die Differenz aber b, so ist nach §. 129.

Auflösung und Beweis.

$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = y.$$

folglich $\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b + y$

und $\tfrac{1}{2}a - y = \tfrac{1}{2}b.$

Das ist, die halbe Summe weniger die kleinere von den gesuchten Grössen ist die halbe Differenz. Wenn also BCF der grössere von den gesuchten Winkeln ist, so wird CFB der kleinere seyn, folglich die halbe Differenz heissen

$\frac{BCF+CFB}{2} - CFB$; oder, damit wir nicht so viel schreiben dürfen, wenn wir den grössern Winkel o + r und den kleinern s heissen, so ist die halbe Differenz

$\frac{(o+r)+s}{2} - s$. Diese wollen wir jetzo suchen. Man verlängere BF bis A, und mache BA = BC. Ferner schneide man von BF die Linie BE = BC ab; so wird ACE ein rechter Winkel seyn, weil ein halber Winkel um ihn beschrieben werden kann, auf dem er aufsteht, und an dessen Peripherie er sich endiget; indeme BA = BC = BE als Radii ihn bestimmen. Man ziehe ferner mit CE die Parallellinie DF aus dem Punkt F, so wird auch bey D ein rechter Winkel seyn. §. 146. Endlich weil BA = BC, so wird die Linie AF

AF = BC + BF die Summe der gegebenen Seiten, und EF = BF — BE = BF — BC ihre Differenz seyn. Nun wird sich die halbe Differenz der Winkel bald ergeben: denn es ist

$$m = (o + r) + s \quad \text{§. 147.}$$
$$m = o + n \quad \text{§. cit.}$$
$$\overline{(o + r) + s = o + n}$$
$$o = n \quad \text{§. 145.}$$
$$\overline{(o + r) + s = 2n.}$$
$$: 2$$
$$\frac{(o + r) + s}{2} = n = \text{halbe Summe:}$$
$$s + p = n \quad \text{§. 146.}$$
$$\frac{(o + r) + s}{2} = s + p.$$
$$s = s \quad \text{der kleinere Winkel.}$$
$$\frac{(o + r) + s}{2} - s = p. \text{ halbe Differenz;}$$

Also ist der Winkel p oder CFD die halbe Differenz der gesuchten Winkeln; wenn wir also die Grösse dieses Winkels wissen, so werden wir die gesuchte Winkel leicht finden können. Das Anschauen der Figur bringt uns auf folgende Proportion:

AF : EF = AD : CD.

Das ist in Worten ausgedrukt: die Summe der Seiten zur Differenz der Seiten wie AD die Tangente von der hal-

ben Summe der gesuchten Winkel (dann $s + p = n$ und n ist die halbe Summe) zu CD der Tangente des Winkels p oder der halben Differenz. Da nun die drey ersten Linien bekannt sind, so findet man auch die vierte; folglich auch den dieser Tangente correspondirenden Winkel p, welcher die halbe Differenz ist; da dann $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}p = (o + r)$ und $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}p = s$ nach §. 129. gefunden wird. Sind aber die Winkel gefunden, so wird die übrige Seite CF nach §. 181. sich leicht bestimmen lassen.

Fünfter Fall, wenn drey Seiten gegeben werden, aus welchen man hernach die Winkel finden solle;

§. 185. Es ist noch ein Fall übrig, wenn einem drey Seiten gegeben werden, aus welchen man die drey Winkel suchen solle. Und das ist der letzte Fall. Man begreifft ohne unser Erinnern von selbst, daß die drey gegebene Seiten einander ungleich seyen: denn wenn sie gleich wären, so würden sich die gesuchte Winkel ohne weitere trigonometrische Rechnung aus §. 147. leicht bestimmen lassen. Die Aufgabe hat also vornehmlich ungleichseitige Dreyecke zu ihrem Augenmerke, unerachtet übrigens auch die gleichseitige dadurch aufgelößt werden können, wenn man eine langwürige und beschwerliche Rechnung einer kurzen und leichten vorziehen will. Es seyen demnach in dem Dreyeck ACB die Seiten AC, CB, und BA gegeben, man solle die Winkel suchen. Dieses

Tab. III. Fig. 55.

ses zu bewerkstelligen, muß man den aus der 53. Fig. leicht zu beweisenden Lehrsatz sich bekannt machen, daß nemlich seye

Tab. III. Fig. 53.

$$CB : CD = CG : CF.$$

Denn wenn wir bewiesen haben, daß $o = y$, so hat die Sache ihre Richtigkeit, weil der andere Winkel FCG beeden Dreyecken CBD und CGF gemein ist. Das erstere läßt sich leicht beweisen.

Auflösung und Beweis.

$$x = \frac{FBD}{2} \quad §. 148.$$

$$y = \frac{FGD}{2} \quad §. cit.$$

$$x + y = \frac{FBD + FGD}{2} \quad §. 9.$$

$$\frac{360^\circ}{2} = \frac{FBD + FGD}{2}$$

$$x + y = \frac{360}{2} = 180^\circ. \quad §. 9.$$

$$o + x = \frac{360}{2} = 180^\circ. \quad §. 141.$$

$$x + y = o + x \quad \text{folglich} \quad §. 9.$$

$$x = x$$

$$y = o.$$

Tab. III. Fig. 55.

Wir haben also bewiesen, was wir beweisen wollten. Wenn man nun in der 55. Fig. aus dem Punkt C des Dreyecks ACB mit dem Radius CB einen Cirkel beschreibt, so ist $CD = CB = CH$; folglich AD die Summe zweyer Seiten und

AH ihre Differenz. Da nun nach dem erstgemeldten Lehrsatz

$$AB : AD = AH : AF,$$

das ist die Grundlinie des Dreyecks zur Summe der zwo übrigen Seiten, wie ihre Differenz zum Stück AF; so läßt sich AF durch die Regel Detri, folglich auch FB = AB — AF leicht finden. Wenn man nun aus C einen Perpendikel auf FG herabfället, so ist FG = GB §. 151. und bey G ein rechter Winkel. Demnach findet man den Winkel GCB, wenn man sagt §. 183.

$$CB : \sin.tot = GB : \sin.GCB.$$

Hat man aber den Winkel GCB gefunden, so hat man auch den Winkel GBC §. 165. Eeben so sucht man den Winkel ACG, weil AC : sin. tot = AG : ACG; folglich ergiebt sich der dritte Winkel CAB von selbst. Man kann also aus einer Seite und zween Winkeln, aus zwo Seiten und einem Winkel, und endlich aus drey Seiten die übrige drey Stücke eines Dreyecks nach den trigonometrischen Lehrsätzen richtig finden.

Von dem grossen Nutzen der Trigonometrie

§. 186. Wir haben nunmehro alles gesagt, was wir in der Trigonometrie zu sagen gesonnen waren. Weil wir aber versprochen, hier dasjenige noch kürzlich nachzuholen, was je und je sonsten in der Geometrie von dem sogenannten

ten Meßtischlein und andern Mitteln, unzugängliche Weiten und Höhen abzumessen, gesagt und vorgetragen wird, so wollen wir das practische davon nur kürzlich noch berühren. Die Hauptsache besteht darinnen, daß man eine Linie und ein paar Winkel, oder umgekehrt einen Winkel und ein paar Linien misset. Diese zwo Aufgaben, besonders die erste, kommen am öftesten vor. Nun wird man allemal, man mag messen, was man will, auf dem Erdboden so viel Raum bekommen, daß man eine Linie messen kann. Mit den Winkeln hat es eine gleiche Beschaffenheit. Schreibt man nun den Innhalt der Linien und Winkel auf, so kann man die gesuchte Linien daheim bey guter Musse trigonometrisch berechnen, ohne daß man andere Mittel dazu nöthig hätte. Ich habe schon gemeldet, daß die leichteste trigonometrische Aufgabe am meisten gebraucht werde: die Höhe eines Thurmes, zu dem man nicht einmal kommen kann, die Weite zweyer unzugänglicher Oerter, die grösseste Entfernung der Sterne u. s. w. lassen sich durch diese simple Aufgabe leicht bestimmen, wie wir schon §. 181. ein Exempel dißfalls gegeben haben. Kommen aber auch solche Fälle vor, wo man aus zwo Seiten und einem eingeschlossenen Winkel oder auch aus drey Seiten die übrige Stücke finden solle;

in der practischen oder ausübenden Mathematik.

solle; so haben wir ja die Art und Weise, wie man hie zu Werke geht, ebenfalls umständlich vorgetragen. Die besondere und practische Hülfsmittel durch Transporteur, Astrolabien, Quadranten, u. s. w. gehören zur ausübenden Mathematik; die Arbeit wird dadurch erleichtert und die Rechnung zuverläßiger; in der Theorie aber geben dergleichen Instrumente an und vor sich selbst kein grösseres Licht. Aus diesem Grunde glauben wir, daß die Absicht unserer gegenwärtigen Arbeit keine umständliche Nachricht von der Instrumentenlehre erfordere; dahero wir auch dieses Capitel, ohne den Vorwurf etwas nöthiges übergangen zu haben, jetzo beschliessen dürfen.

Drittes Capitel.

Von den Kegelschnitten und andern krummen Linien.

§. 187.

Die Kegelschnitte sind von Alters her immer ein Gegen-

Unter allen krummen Linien haben die sogenannte Kegelschnitte oder conische Sectionen je und je eine Hauptbeschäfftigung der Mathematikverständigen ausgemacht. Die meiste Mühe hat sich

sich Apollonius von Pergen, dißfalls gegeben, und seinen Namen durch diese Arbeiten bey der Nachwelt verewiget.

Aus dem ersten Capitel dieses zweyten Theils muß es unsern Lesern noch bekannt seyn, was ein Conus oder Kegel seye. Die 48. und 65. Fig. stellen einen vor. Nun kann man ihn mit einer Fläche auf verschiedene Weise schneiden. Gehet die schneidende Fläche durch den Scheitelpunkt D, so entsteht das Dreyeck DBC, folglich eine geradelinichte Figur; gehet sie mit der Grundfläche BGC parallel, so bekommt man einen Cirkel; welcher auch erzeugt wird, wenn man einen scalenischen oder ungleichseitigen Kegel also schneidet, daß der Winkel, den der Diameter des Durchschnittes mit der einen Seite des Kegels bestimmt, eben so groß wird, als der Winkel, den die andere Seite des Kegels mit dem Diameter seiner Grundfläche macht. Ein solcher Schnitt heißt sectio subcontraria, und wird vornemlich bey den perspectivischen und astronomischen Projectionen genutzet. Weil nun durch diese drey Gattungen von Durchschnitten theils geradelinichte Dreyecke, theils Cirkel erzeuget werden, so gehören sie nicht zu den eigentlichen Kegelschnitten, indeme die Lehre von den Dreyecken sowohl als von den Cirkeln in dem ersten Cap. der Geom. abgehandelt wurde. Es giebt

stand der Mathematik gewesen;

Was ein Kegel oder Conus seye, und auf wie vielerley Weise er geschnitten werden könne.

Tab. IV. fig. 65.

Erste Art des Schnitts, wodurch ein geradelinichtes Dreyeck entsteht.

Zweyte und dritte Art, welche auch sectio subcontraria heißt, und wodurch Cirkel entstehen.

Warum diese drey Arten zu den eigentlichen Kegelschnitten, wovon in diesem Capitel

die Rede ist, nicht gerechnet werden.

giebt aber noch drey andere conische Sectionen, welche in diesem Capitel ihre eigene Stelle erhalten. Denn man kann einen Kegel auch also schneiden, daß die Axe des Durchschnittes Ah mit der entgegenstehenden Seite des Kegels DC entweder allezeit parallel bleibet, oder daß sie diese Seite unter einem beliebigen Winkel innerhalb der Spitze des Kegels durchschneidet, oder daß sie endlich mit der über die Spitze D verlängerten Seite, wenn sie gleichfalls verlängert wird, sich zuletzt vereiniget. Im ersten Fall entstehet eine **Parabel**, im zweyten eine **Ellipsis**, im dritten eine **Hyperbel**. Den Ursprung dieser Namen wollen wir im folgenden erklären.

Vierte Art, wodurch eine Tab. IV. Fig. 65. Parabel entsteht.

Fünfte und sechste Art, wodurch Ellipses und Hyperbeln erzeuget werden.

Tab. IV. fig. 65.

Von der Parabel, und wie sie aus dem Kegel geschnitten werde.

§. 188. Wir reden zuerst von der Parabel. Wenn ein Kegel so geschnitten wird, daß die Axe des Durchschnittes Ah mit DC parallel, und die Linie Gh mit dem Diameter der Grundfläche AC einen rechten Winkel in h machet, so heißt man die Figur AMGh eine Parabel. Nun wollen wir sehen, was diese Figur für Eigenschaften habe. Man mache in einem beliebigen Punkt E einen mit der Grundfläche parallelen Durchschnitt EMF, so wird man einen Cirkel bekommen, weil die Grundfläche ein Cirkel ist. Demnach wird auch PM mit Gh parallel, und folglich kraft der Natur des Cirkels

Wie man die Eigenschaft der Parabel aus Betrach-

kels

kels seyn $PM^2 = PE.PF$. Nun sind die zwey Dreyecke DCB und APE einander ähnlich. Folglich ist

$$DC:BC = AP:PE$$

und also $\frac{BC.AP}{DC} = PE$.

Dahero, wenn man gleiches für gleiches substituirt, so hat man

$$PM^2 = \frac{AP.BC.PF}{DC.}$$

Wenn man ferner aus dem Punkt A mit der Grundlinie eine Parallellinie AN ziehet, so ist $AN = PF$, weil sie parallel sind, und zwischen einerley Parallellinien stehen. Da nun nach dem Grundsatz der Aehnlichkeit $DB:BC = DA:AN$, so ist $AN(=PF) = \frac{BC.DA}{DB}$ folglich wenn man abermal gleiches für gleiches setzet,

$$PM^2 = \frac{AP.BC.BC.DA}{DC.DB} = \frac{AP.BC^2.DA}{DC.DB}$$

Da nun der Punkt M nach Belieben angenommen werden kann, so wird die Gleichung auch bey einem jeden andern Punkt angehen, und allemal das Quadrat von PM, oder $PM^2 = AP. \frac{BC^2.DA}{DC.CB}$; und weil die Linien BC, DA, DC und CB unverändert bleiben, der Punkt M mag angenommen werden, wo man will, so kann man eine beständige Linie dafür setzen, oder

tung des Kegels, woraus sie geschnitten wird, bestimmen könne;

und besonders wie man den Parameter finde, und augenscheinlich überzeuget werde, daß er eine beständige

und unveränderliche Linie seye.

oder selbige durch die Regel Detri suchen, wenn man sagt:

DC . DB : BC^2 = DA : AK, der vierten Proportionallinie, welche AK seyn solle. Demnach wird AK . AP = PM^2. Diese beständige und unveränderliche Linie AK haben die Alten das latus rectum, die Neuere aber den Parameter genannt. Die Linie PM heißt die Semiordinate, und AP die Abscisse. Wenn man nun die Semiordinate PM immer y, die Abscisse aber x und den Parameter a nennet, so ist $ax = y^2$; und das ist die beständige Eigenschaft der Parabel; woraus sich auch der Ursprung dieses Namens erklären läßt. Denn man siehet bey diesen Gleichungen auf die Verhältnisse des Rectanguli aus dem Parameter in die Abscisse zum Quadrat der Semiordinate. Wenn das Rectangulum aus AK in AP, oder in der Figur, AKOP, dem Quadrat von PM, oder PM^2, gleich ist, so druckt der griechische Name Parabel diese Gleichheit aus. Wie deßwegen auch in der Rhetorik, wiewohlen in einem andern Verstand, die Parabel ein Gleichniß heisset. Eben so, wenn das Quadrat von PM kleiner ist als das Rectangulum AKOP, oder AP . AK, so fehlet noch was zur Gleichheit, folglich heißt eine solche Figur eine Ellipsis; und wenn endlich das Quadrat von PM grösser ist

Allgemeine Eigenschaft der Parabel.

Ursprung des Worts oder Namens Parabel;

wie auch der Ellipsis und

als

als das Rectangulum AP . AK, so entstehet eine Hyperbel, (ein Excessus). Das ist der Ursprung dieser Namen, welche nun leicht zu verstehen sind, wenn man das vorgetragene mit Bedacht gelesen hat, und dabey ein wenig griechisch versteht.

der Hyperbel.

§. 189. Wir haben uns bemühet, Anfängern zu gefallen, eine umständliche Beschreibung von dem Parameter zu geben. Manche können sich in die algebraische Aequationen dieser Art nicht so gleich finden, weil sie den Parameter nicht deutlich in der Figur sehen, da sie doch alle andere Linien, z. E. die Abscissen, die Semiordinaten, die Axe, den Diameter, u. s. w. sehen: dahero wir glauben, uns mit dieser Lehre nicht ohne Noth aufgehalten zu haben. Doch wollen wir bey der Ellipsis und Hyperbel uns kürzer dißfalls ausdrucken, und nur so viel melden, daß die beständige aber nicht so sichtbar in die Augen fallende Linie, welche der Parameter heißt, auf eine ähnliche Weise bey diesen beeden Figuren gefunden werden könne. Dahero wird die Einbildungskraft im folgenden keine Einwendungen mehr machen, wenn wir gleich nicht allemal den Parameter vor ihre Augen hinmalen werden.

Warum man von dem Parameter und dessen Bestimmung so ausführlich gehandelt, und woher es komme, daß Anfänger wegen dieser nicht so leicht in die Sinne fallender Linie hie und da Schwürigkeiten finden.

Warum man aber doch im folgenden sich kürzer ausdrucken werde.

§. 190. Jetzo betrachten wir die Kegelschnitte als algebraische Linien, ausser der Verhältniß, die sie mit dem Kegel haben,

Wie man die Kegelschnitte als algebraische Li-

nien betrachte; ben, woraus sie geschnitten sind. Man muß sich aber die dabey vorkommende Namen und ihre Erklärungen wohl bekannt machen.

was der Diameter seye, und wie er von der Axe unterschieden werde.

Der Diameter einer krummen Linie ist diejenige gerade Linie, durch welche alle von einem Punkt der krummen Linie zum andern gezogene gerade Parallellinien in zween gleiche Theile getheilet werden. Geschiehet diese Theilung unter einem rechten Winkel, so heißt der Diameter die Axe. So ist z. E. die Linie AH die Axe der Parabel ANM, die Linie AB die Axe der Ellipsis AMNB u. s. w. denn wenn die krumme Linie in Gedanken auf der andern Seite, wie in der 67. Fig. um die Axe vollends herumbeschrieben wird, so würde eine eben so grosse Linie als PM unter einem gleichen Winkel bis an den entgegen gesetzten Punkt der krummen Linie gezogen werden können; da dann PM = Pm wie PR = Pr.

Tab. IV. Fig. 66. Fig. 68.

Tab. IV. Fig. 67.

Erklärung der Ordinaten und Semiordinaten;

Eine solche ganze Linie z. E. Mm heißt die Ordinate, und ihre Hälfte PM die Semiordinate; sie mag hernach durch die Axe oder durch einen Diameter überhaupt in zween gleiche Theile bey P abgeschnitten worden seyn. Wir werden aber vornehmlich die Semiordinaten in Rucksicht auf die Axen betrachten, mit welchen sie rechte Winkel machen.

Tab. IV. Fig. 65. 66. 67. 68. 69.

So sind FN, PM, Pm Semiordinaten, welche alle, sie mögen auf den Diameter

oder

oder auf die Axe gezogen werden, paral⸗ lel seyn, nur aber im letztern und gewöhn⸗ lichsten Fall, wenn man sie auf die Axe ziehet, die Axe unter rechten Winkeln schneiden müssen. Es ist noch eine Linie übrig, welche zu wissen gleich nöthig ist, nemlich die Abscisse. Sie ist allemal ein Theil entweder des Diameters oder der Axe, und wird durch die Semiordi⸗ nate und den Scheitelpunkt der krummen Linie, von welchem man den Diameter zu ziehen anfängt, oder auch durch einen andern angenommenen festen Punkt be⸗ stimmt. So sind die Linien AF, AP, Ap in den schon angeführten Figuren Ab⸗ scissen, in so ferne man sie von dem Schei⸗ telpunkt A zu zehlen anfängt. Allein die Linien CP, CF, in der 68. Fig. und CD in der 37. Fig. können auch als Abscissen angesehen werden, in so fern sie von dem Mittelpunkt C an gerechnet werden. Wie man die Semiordinaten in den Figuren gemeiniglich PM, und die Abscissen AP schreibet, so werden in den algebraischen Rechnungen, woferne nichts besonders angemerkt wird, jene allemal y und diese x genannt. Folglich wird in der Gleichung für die Parabel, wenn der Parameter a ist, der Ausdruck $a \cdot AP = PM^2$ alge⸗ braisch geschrieben $ax = y^2$. Diesen Ausdruck muß man sich vorzüglich be⸗ kannt machen; weil alle Algebraisten da⸗ bey

Was die Abscissen einer krummen algebr. Linie seyen;

und wie die Abscissen theils vom Scheitel⸗ punkt, theils von einem andern belie⸗ bigen Punkt, z. E. von dem Mittelpunkt, gerechnet werden kön⸗ nen.

Tab. IV. Fig. 68

Tab. II. Fig. 37.

Mit was für Buchstaben die Abscissen und Semiordinaten gemeiniglich ausgedrukt werden;

bey bleiben, und die Abscissen x die Semiordinaten aber y nennen. Beede heisset man auch **veränderliche Grössen** (quantitates variabiles) in Rucksicht auf die unveränderliche Grössen (quantitates constantes), dergleichen z. E. im Cirkel der Radius, in den conischen Sectionen der Parameter u. s. w. ist. Daß aber die Abscissen und Semiordinaten wirklich veränderliche Grössen seyen, erhellet aus den Figuren. Z. E. die Abscisse AF ist kleiner als AP, darum correspondirt der ersteren auch eine kleinere Semiordinate FN als der letzteren, nemlich PM. Dem ungeachtet bleibt der Parameter bey AF so groß als bey AP, und wird im geringsten nicht verändert. Die übrige Erklärungen von einigen noch zu bestimmenden Linien wollen wir an ihrem Ort gehörig anbringen, damit wir unsere Leser nicht auf einmal mit so vielen Definitionen ermüden.

Warum sie veränderliche Linien heissen; und was unveränderliche oder beständige Grössen seyen;

Tab. IV. fig. 66.

§. 191. Die erste krumme Linie, die von den conischen Sectionen abhanget, ist die Parabel. Nun haben wir §. 187. schon bewiesen, daß bey dieser Linie $ax = y^2$ oder $a. AP = PM^2$, das ist, daß das Product aus der Abscisse in den Parameter dem Quadrat der Semiordinate gleich seye; wir dürfen dahero diese Fundamentalgleichung jetzo zum Grunde legen, und das weitere daraus schliessen. Weil $ax = y^2$, so ist, wenn man beederseits mit

Einige Folgen aus der Gleichung für die Parabel;

mit a dividirt, $x = \frac{y^2}{a}$, und wenn man mit x dividirt, $a = \frac{y^2}{x}$, und wenn man die Quadratwurzel beederseits ausziehet, $\sqrt{ax} = y$. Diese Ausdrücke folgen unmittelbar aus der Gleichung, und werden uns im folgenden zu statten kommen. Wir gehen aber weiter, und führen jetzo eine wichtige Eigenschaft der krummen Linien dieser Art an. Eine jede solche Linie muß in ihrer Axe einen Punkt haben, in welchem die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist. Ein solcher Punkt wird der **Brennpunkt** genannt (focus). Der Ursprung dieses Namens gründet sich auf die optische Wissenschaften, weil nemlich alle Strahlen in einem parabolischen Spiegel u. s. w. gegen diesen Punkt gebrochen, folglich darinnen gesammelt werden, und eine Hitze verursachen, welche den Namen eines Brennpunktes wohl verdienet. Nun begehrt man zu wissen, wie weit es von dem Scheitelpunkt der Axe, nemlich von A zu diesem Brennpunkt in der Parabel seye? Es seye der gesuchte Punkt F, so wird nach der gegebenen Erklärung die Semiordinate FN dem halben Parameter gleich seyn; da wir nun bey der Parabel den Parameter a nennen, so ist $FN = \frac{1}{2}a$; AF ist eine Absciße, wel-

Von dem Brennpunkt einer krummen Linie, und warum derjenige Punkt der Absciße, in welchem die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist, der Brennpunkt genannt werde, wird aus den optischen Wissenschaften erläutert.

Tab. IV. Fig. 66.

Wie man den Brennpunkt der Parabel finde.

 che

che folglich, wie alle Abscissen, x heisset. Da nun $ax = y^2 = FN^2$, so wird, wann man gleiches für gleiches setzet, im gegenwärtigen Fall seyn

$ax = \frac{1}{4}a^2$. weil $\frac{1}{2}a = FN$ und das Quadrat von $\frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$. Demnach

———————— : a

$x = \frac{1}{4}a$;

das ist, die Distanz des Brennpunkts vom Scheitelpunkt der Axe ist in der Parabel dem vierten Theil des Parameters gleich. Verlangt man ferner zu wissen, wie groß die vom Brennpunkt F bis an das Ende einer Semiordinate M gezogene Linie FM seye, so wird sich ihre Grösse durch folgende Rechnung leicht bestimmen lassen: wenn $AP = x$, so ist $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$; wenn nemlich AP grösser als AF, oder die Abscisse über den Brennpunkt hinaus geht. Nun ist nach den geom. Lehrsätzen des ersten Capitels §. 159. $PM^2 + PF^2 = FM^2$, weil bey P ein rechter Winkel; das giebt in Buchstaben folgende leichte Rechnung

Wie groß eine aus dem Brennpunkt an die Parabel gezogene Linie seye, u. s. w.

$PM^2 = ax$

$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$ dieses addirt

———————————— giebt

$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

———————————— folglich

$FM = x + \frac{1}{4}a$.

Diese Linie FM ist also allemal gleich AP + AF, das ist, der Abscisse AP und der

Ent-

Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkt AF zusammen genommen; und eben so groß ist die Linie TF, und die Linie FH, wie wir im vierten Cap. beweisen werden, wenn wir von den Tangenten, Subtangenten und Subnormalen der krummen Linien reden, und den Beweis weit kürzer fassen können, als er sich jetzo ausdrucken liesse. Diß ist alles, was wir in dem gegenwärtigen Cap. von der Parabel sagen wollten. Denn daß es Parabeln von höhern Gattungen geben könne, ist ohne unser Erinnern klar. Die Fundamentalgleichung führt uns von selbst darauf; weil $ax = y^2$, so sieht man schon, daß die Potenz von a um eins geringer ist, als die von y; folglich wird $a^2x = y^3$ und $a^3x = y^4$ u. s. w. Demnach mit allgemeinen Ausdrücken $a^{m-1}x = y^m$. Ein solcher Ausdruck begreifft das ganze Geschlecht der krummen Linien in sich, welche alle Parabeln genannt werden. (familia curvarum.) Dergleichen höhere Gattungen aber lassen sich durch in gegebenen Verhältnissen zu ziehende gerade Linien eben so construiren, wie die niedrigste, wie es Herr Baron von Wolf in den Actis Erud. gezeiget hat. Endlich begreifft man auch, daß die Sache eben so wenig Schwürigkeit habe, wenn der convexe Theil der Parabel gegen die innere gerade Linie, dergleichen die 71. Fig.

Was Parabeln von höhern Gattungen seyen; und was man unter den Familien der krummen Linien versteht.

Tab. IV. Fig. 71.

Was eine Parabola externa seye.

ausweiset, bekehret wird. Eine solche Gleichung heißt æquatio ad parabolam externam.

Erklärung der Ellipsis,

warum sie so heisse, wird Tab. IV. Fig. 68. aus der Natur der Gleichung gezeigt.

§. 192. Die Ellipsis ist eine solche krumme Linie, in welcher das Quadrat der Semiordinate oder PM^2 gleich ist dem Product des Parameters in die Abscisse, weniger dem durch die Axe dividirten Product des Parameters in das Quadrat der Abscisse. Und eben deßwegen, weil von dem erstern Product etwas abgezogen wird, heißt diese krumme Linie eine Ellipsis; wie wir gezeigt haben. Die Gleichung ist wie bey der Parabel, was die Buchstaben betrifft; nur müssen wir erinnern, daß bey der Ellipsi und auch hernach bey der Hyperbel zwo beständige Linien, nemlich die Axe und der Parameter vorkommen. Nun wäre es gut, wenn man den Parameter, wie bey der Parabel, immer a, die Axe aber mit einem andern Buchstaben b genannt hätte. Die meiste Algebraisten aber und unter diesen besonders Herr Wolf nennen den Parameter hier b und die Axe a. Da wir nun keine Neuerung anfangen, und auch denjenigen Lesern nicht mißfallen wollen, welche aus den Wolfischen Schriften schon diese Lehre sich bekannt gemacht haben; so merken wir hier an, daß bey den elliptischen und hyperbolischen Figuren der Parameter allemal b und die Axe a heisset.

Bey der Ellipsi kommen zwo beständige Linien vor.

Warum man den Parameter der Ellipsis und Hyperbel mit einem andern Buchstaben als den Parameter der Parabel bezeichne? damit man nemlich bey den angenommenen Gewohnheiten der Algebraisten bleibe;

Dem-

Demnach ist die Gleichung für die Ellipsis in Buchstaben ausgedruckt, die folgende:

Fundamentalgleichung der Ellipsis;

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$ das ist in der

Figur, wenn wir nur den Buchstaben b für den Parameter, den wir hier nicht mehr wie in der Parabel, um nicht zu weitläuftig zu werden, ausdrücklich zeichnen, beybehalten:

$$PM^2 = b \cdot AP - \frac{b \cdot AP^2}{AB}.$$ Wenn nun die Axe dem Parameter gleich ist, so ist

wie sie auf den Cirkel angewandt werde, und wieferne der Cirkel eine Ellipsis sey.

$b = AB$, folglich

$$PM^2 = AB \cdot AP - \frac{AB \cdot AP^2}{AB}$$ das ist

$PM^2 = AB \cdot AP - AP^2$ oder schicklicher ausgedruckt nach §. 60.

$PM^2 = (AB - AP)\, AP$. Welches die Gleichung für den Cirkel ist; weil in diesem Fall die Proportion sich ergiebt:

$$AP : PM = PM : AB - AP = PB.$$

das ist: $x : y = y : a - x$

folglich $y^2 = ax - x^2$, wie wir im ersten Capitel §. 162. gezeiget. Der Cirkel ist also nichts anders als eine Ellipsis, deren Axe und Parameter einerley sind. Um aber wieder auf die Ellipse zu kommen, so siehet man leicht, daß diese krumme Linie nicht wie die Parabel ins unendliche fortgehet, sondern sich um ihre Axe

Wie man beweisen könne, daß die Ellipsis sich, wie der Cirkel, zuletzt schliessen müsse.

herumbewegt, und wie die Cirkelförmige schliesset. Denn weil $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$, so wird, woferne man $y^2 = o$ setzet, auch

$bx - \frac{bx^2}{a} = o$ folglich, wenn man beederseits $\frac{bx^2}{a}$ addirt

$$bx = \frac{bx^2}{a}$$

$$\cdot a$$

$$abx = bx^2$$

$$: bx$$

$a = x$. Hieraus ist klar, daß die krumme Linie die Axe zweymal, nemlich in A und B schneiden müsse, weil sonsten in dem Fall, daß $y^2 = o$ die Abscisse oder x nicht AB oder a gleich werden könnte.

Warum eine Ellipsis zwo Axen, eine grössere und kleinere, habe? diese beede Axen werden erklärt;

§. 193. Die Ellipsis hat zweyerley Axen, eine grosse und eine kleinere; die grössere ist AB, die größte gerade Linie, die von einem Punkt der krummen Linie zum andern gezogen werden kann; oder der größte Diameter ist die grössere Axe. (Axis major.) Wenn ich nun die grössere Axe in zween gleiche Theile in C theile, und die Perpendicularlinie oder Semiordinate CD ziehe, so ist CD die Hälfte der kleinern Axe; welche gegen die andere Seite der Ellipsischen Linie continuirt, die

klei-

kleinere Axe ganz giebt. In diesem Falle ist nun die Abscisse $AC = \frac{1}{2}a$; dahero die Gleichung für die kleinere Axe bald gefunden wird. Dann weil die Ellipsis überhaupt folgende Eigenschaft hat, daß

Tab. IV. Fig. 68.

$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ so darf man nur für die Abscisse x überall $\frac{1}{2}a$ substituiren; da sich dann ergiebt

$$y^2 = \tfrac{1}{2}ab - \frac{1a^2b}{4a} = \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}ab.$$

Nun ist y in diesem Fall die Hälfte der kleinern Axe oder CD, folglich ist

Die kleinere Axe ist die mittlere Proportionallinie zwischen der grösseren Axe und dem Parameter.

$$CD^2 = \tfrac{1}{4}ab \text{ dahero}$$
$$CD = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}. \text{ und } .2$$
$$2CD = 2 . \tfrac{1}{2}\sqrt{ab} = \sqrt{ab}.$$

Das ist, die kleinere Axe = CD ist die Quadratwurzel aus dem Product des Parameters in die grössere Axe; oder, weil $a : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : b$, so ist die kleinere Axe die mittlere Proportionallinie zwischen der grössern Axe und dem Parameter.

§. 194. Nun wollen wir auch die Weite des Brennpunkts von dem Scheitelpunkt der elliptischen Axe suchen. Der Brennpunkt ist allemal da, wo die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist. Er seye in F, so ist die Semiordinate

Tab. IV. Fig. 68.

Wie man den Brennpunkt

der Ellipsis finden und bestimmen könne;

te $FN = \frac{1}{2}b$ und $AF = x$; folglich nach der elliptischen Fundamentalgleichung

$$\frac{1}{4}b^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \cdot a$$

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : b$$

$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$ Dahero auch, wenn man beederseits gleiches addirt und subtrahirt, oder die Zeichen verändert,

$-\frac{1}{4}ab = -ax + x^2$ eine unreine quadratische Gleichung; folglich

$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ addirt, giebt

$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$, dahero

$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)} = \frac{1}{2}a - x$ und

$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$.

Wenn also $= b$, und die Ellipsis ein Cirkel wird, so ist

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2)} = \frac{1}{2}a.$$

Folglich fällt der Brennpunkt, wie es auch die Erfahrung lehret, gerade in den Mittelpunkt C. Ferner wird bey der Ellipsis die Distanz des Brennpunkts von dem Mittelpunkt $C = CF = AC - AF = \frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)} = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$ seyn; wie man aus der Figur leicht ersiehet. Da es nun auf beyden Seiten der Axe von C aus zween dergleichen

chen Distanzen nemlich FC und fC giebt, so hat die Ellipsis zween Brennpunkte F und f, welche bey dem Cirkel in C zusammen fallen. Uebrigens fliesset aus der Betrachtung der beeden Brennpunkte noch eine schöne Eigenschaft der Ellipsis, welche darinnen besteht, daß die Summe der beeden aus dem Brennpunkt F und f um einen Punkt der Peripherie gezogenen geraden Linien FM und fM allemal der grössern Axe AB gleich seye. Eine Eigenschaft, die wir jetzo beweisen wollen, wenn wir vorhero gezeigt haben, wie sich die Quadrate zwoer Semiordinaten gegen einander verhalten.

Warum die Ellipse zween Brennpunkte habe: und wie diese zween Punkte bey dem Cirkel in dem Mittelpunkt zusammen fallen.

§. 195. Man betrachte die zwo Semiordinaten PM, und CD, davon die letztere die Hälfte der kleinern Axe ist, und nenne sie y und v; die correspondirende Abscissen heisse man x und z; davon letztere = AC die Hälfte der grössern Axe ist; so wird nach der Fundamentalgleichung seyn

Tab. IV. Fig. 68.

Die Summe zwoer aus den beeden Brennpunkten der Ellipse gezogenen geraden und an der Peripherie zu-

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \text{ und}$$

$$v^2 = bz - \frac{bz^2}{a}, \text{ folglich}$$

$$y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$$

sammen stos-sender Linien ist allemal ei-nerley oder gleich gros, und der grös-seren Axe gleich,

$$y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2$$
$$\overline{} : b$$
$$y^2 : v^2 = ax - x^2 = az - z^2.$$

Wenn man nun die in der Figur gezeichnete Linien dafür setzet, so hat man

$$PM^2 : CD^2 = AP \cdot PB : AC^2,$$

oder versetzt nach §. 80.

$$AC^2 : CD^2 = AP \cdot PB : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}ab = ax - x^2 : y^2.$$

wird umständlich bewiesen;

Nun wollen wir CD^2 anders ausdrucken. Man ziehe die aus dem Brennpunkt F bis an das Ende der kleinern Axe D eine Linie FD, so ist nach dem pythagorischen Lehrsatz $CD^2 = FD^2 - FC^2$, das ist, wenn man ihre Werthe §. 192. substituirt:

$$\tfrac{1}{4}ab = FD^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab.$$

Nun wollen wir sehen, was FD^2 ist; man subtrahire beederseits $\tfrac{1}{4}ab$, so ist,

$$FD^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = 0.$$ Folglich wenn beederseits addirt wird,

$$\tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\overline{FD^2 = \tfrac{1}{4}a^2} \quad \text{und}$$
$$FD = \tfrac{1}{4}a.$$

Demnach wird allemal die aus dem Brennpunkt der Ellipsis an das Ende der kleinern Axe gezogene Linie FD die Hälfte der grössern Axe seyn; dahero läßt sich auch das Quadrat von DC, oder DC^2,

wenn

wenn man $FC = c$ setzet, folgender massen ausdrucken: $DC^2 = \frac{1}{4}a^2 - c^2$.

Es ist also die Verhältniß

$$AC^2 : CD^2 = AP.PB : PM^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$$

woraus sich PM^2 finden läßt

nemlich $\dfrac{(\frac{1}{4}a^2 - c^2).(ax - x^2)}{\frac{1}{4}a^2} = PM^2$

Weil ferner $FC = fC = c$ gesetzt wurde, so ist

$$PC = AC - AP$$
$$= \tfrac{1}{2}a - x$$
$$Pf = Cf + PC$$
$$= c + \tfrac{1}{2}a - x$$
$$PF = CF - PC$$

$= c - \frac{1}{2}a + x$. Folglich

$$PF^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2$$
$$= (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$$
$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$PF^2 + PM^2 = FM^2 = \tfrac{1}{2}(a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a}$$

Fer-

Ferner ist

$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(a+c)^2 - 2cx - ax + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$Pf^2 + PM^2 = fM^2 = \tfrac{1}{2}(a+c)^2 - 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}.$$

$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - \frac{2cx}{a}$$

Da aber $FM = \tfrac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a}$

so ist $fM + FM = a = AB$.

Dieses ist der Beweis derjenigen Eigenschaft der elliptischen Linie, daß nemlich alle aus den beeden Brennpunkten an einen Punkt der Peripherie gezogene gerade Linien zusammen genommen der grössern Axe gleich seyen. Folglich sind die Summen aller auf diese Weise gezogenen Linien einander gleich; das ist FM + Mf = FN + Nf u. s. w. und die Dreyecke FMf, FNf u. s. w. sind durchgehends so beschaffen, daß ihr Parameter, oder die Summe der drey Linien, durch welche sie beschlossen werden, immer gleich groß und einerley bleibt. Man siehet hieraus, daß sich leicht eine Ellipsis aus der gege-

be-

benen Eigenschaft bestimmen läßt. Ebenfalls erhellet aus dem gegebenen Beweise, wie man die sogenannten elliptische Sprachgewölbe erbauen müsse. Denn wenn eine Person in F und die andere in f stehet, so werden alle Töne, die von F aus in den Punkten M, D, N, u. s. w. anstosen, nach f ihre Richtung bekommen; folglich wird derjenige Zuhörer, der in f stehet, den Redner in F, wenn er auch gar nicht laut redet, am besten und besser als die näheren Zuhörer verstehen. Wir haben gesagt, daß man auch die Abscissen von dem Mittelpunkte zu zehlen anfahen könne. Denn C ist der Mittelpunkt, folglich wird die davon gerechnete Abscisse $PC = x$ und $AP = AC - PC = \frac{1}{2}a - x$, hingegen $PB = PC + CB = \frac{1}{2}a + x$ seyn. Da sich dann die vorige Gleichung wieder ergibt. Oder wenn man $AC = r$ setzet, so ist $AP = r - x$ und $PB = r + x$ folglich $AP \,.\, PB = r^2 - x^2$. Nennet man nun $CD = d$, so ist, weil

Einige praktische Folgen aus dem gegebenen Beweise.

Tab. IV. Fig. 68.

Eine Gleichung für die Ellipsen, wenn die Abscissen von dem Mittelpunkt an gerechnet werden.

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AP \,.\, PB$$

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

folglich $r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)$

$$: y^2$$

und $y^2 = \frac{d^2 .(r^2 - x)}{r^2}$

in welcher Gleichung die Abscissen von dem Mittelpunkte gerechnet werden.

§. 196.

Erklärung der Hyperbel, und ihre algebraische Gleichung.

§. 196. Die Hyperbel ist die letzte krumme Linie, welche durch die conische Sectionen entstehet. Ihre Gleichung ist $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$; das ist, in der Hyperbel ist das Quadrat der Semiordinate gleich dem Producte des Parameters in die Abscisse, und noch dem durch die Zwerchaxe dividirten Producte des Parameters in das Quadrat eben derselben Abscisse. Die Zwerchaxe heißt die Linie AB, welche von dem Scheitelpunkte der einen Hyperbel in den Scheitelpunkt der andern gezogen wird, indem, wie wir §. 186. gezeigt haben, die Axe einer jeden Hyperbel, wenn sie über den Scheitelpunkt verlängert wird, die gleichfalls verlängerte Seite des Kegels endlich schneiden muß; diese Linie heißt nun die Zwerchaxe, (axis transversus). Theilet man sie nun in zween gleiche Theile in C, so heißt C der Mittelpunkt davon. Wenn man endlich zwischen der Zwerchaxe und dem Parameter die mittlere Proportionallinie suchet, so wird die gefundene Linie die conjugirte Axe genannt. (axis conjugatus.) Nun läßt sich leicht der Brennpunkt in der Hyperbel finden. Nach der gegebenen Gleichung, weil die Semiordinate allemal in diesem Falle der halbe Parameter ist, wird seyn

Tab. IV. Fig. 67.

Was die Zwerchaxe sey;

Was der Mittelpunkt, oder centrum hyperbolæ, heisse;

und was axis conjugatus seye.

Wie man den Brennpunkt

$\frac{1}{4}b^2$

$\frac{1}{4} b^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ der Hyperbel, finde;

$$\frac{1}{4} b = x + \frac{x^2}{a} \quad : b$$

$$\frac{1}{4} ab = ax + x^2 \quad . a$$

eine quadratische unreine Gleichung; folglich

$\frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2$ addirt:

$\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab = \frac{1}{4} a^2 + ax + x^2$ dahero

$\sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab)} = \frac{1}{2} a + x$ demnach

$\sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab)} - \frac{1}{2} a = x.$

Da nun $\frac{1}{2} a$ die halbe Zwerchaxe oder die Distanz des Scheitelpunkts A von dem Mittelpunkte C ist: so wird die Distanz des Brennpunkts vom Mittelpunkt, wenn man nemlich $\frac{1}{2} a$ addirt, $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab)}$. Wie man übrigens bey der elliptischen Linie bewiesen hat, daß die zwo aus den beeden Brennpunkten an einen Punkt der Peripherie gezogene Linien der grössern Axe gleich seyen; so läßt sich auf gleiche Weise darthun, daß bey zwo gleichen Hyperbeln, welche durch die Zwerchaxe in den Punkten A und B vereiniget werden, die Differenz zweyer solcher Linien, auch der Zwerchaxe gleich sey. Die Art des Beweises ist ganz gleich mit demjenigen,

 den

den wir §. 193. vorgetragen haben; dahero wir auch dißfalls nicht ohne Noth uns in Weitläuftigkeiten einlassen wollen.

§. 197. Hingegen ist dasjenige bey dieser krummen Linie etwas neues, was von den Asymptoten gelehret wird. Wir wollen dahero diese Materie kürzlich vortragen. Man beschreibe mit den Semiordinaten PM, Pm durch den Scheitelpunkt A eine Parallellinie DE, und mache sie der conjugirten Axe dergestalten gleich, daß DA die halbe Axe und AE die andere halbe Axe wird; hernach ziehe man aus dem Mittelpunkte C durch die Punkte D und E die Linien CD bis R u. s. w. wie auch die Linie CE bis r u. s. w. so werden CR und Cr die Asymptoten der Hyperbel werden. Den Ursprung dieses Namens wollen wir sogleich zeigen, wenn wir vorher einige andere Linien bestimmt haben. Aus der Proportionslehre wissen wir noch, daß

Von den Asymptoten der Hyperbel; wie die Asymptoten gezogen werden.

Tab. IV. Fig. 67.

$$CA : AE = CP : Pr$$

und $$CA : AD = CP : PR.$$

folglich ist $$Pr = \frac{AB . CP}{CA}$$

und $$PR = \frac{AD . CP}{CA.}$$

Weil aber AD = AE, indem diese Linien

nien gleich gemacht worden sind: so ist, wenn man gleiches für gleiches setzt, auch $PR = \frac{AE . CP}{CA}$. Wenn nun zwo Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich; folglich ist $PR = Pr$.

Nun ist aber auch nach der Natur der Semiordinaten $PM = Pm$

folglich $PR - PM = Pr - Pm$

das ist $RM = rm$.

Nun ziehe man ferner die Linie AI parallel mit DC, so ist

$EA : ED = AI : DC$; nun ist

$EA : ED = \frac{1}{2} : 1$ folglich

$AI : DC = \frac{1}{2} : 1$

das ist, $AI = \frac{1}{2} DC$.

Und weil $DC = CE$, so ist $AI = \frac{1}{2} CE$.

ferner ist $EA : AD = EI : IC$.

Nun ist $EA : AD = 1 : 1$.

Dahero $EI : IC = 1 : 1$, das ist

$EI = IC = \frac{1}{2} CE$.

Es ist aber auch $AI = \frac{1}{2} CE$.

folglich $EI = CI = AI$.

Nun heisset man das Quadrat der Linie AI oder CI die Potenz der Hyperbel; sie wird sich also leicht aus den beeden

Was die Potenz der Hyperbel sey.

Axen bestimmen lassen. Denn $CA = \frac{1}{2}a$ und AE die andere halbe Axe wollen wir $\frac{1}{2}c$ nennen. Da nun nach dem pythagorischen Lehrsatz $CE^2 = CA^2 + AE^2$

$$= \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2$$

so ist $CE = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$

und $\tfrac{1}{2}CE = CI = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$

folglich $CI^2 = \frac{a^2+c^2}{16}$, das heißt, die

Potenz der Hyperbel ist der sechszehende Theil von der Summe der Quadrate der beeden Axen; oder weil $c^2 = ab$, indeme, nach der gegebenen Erklärung, diese Axe die mittlere Proportionallinie zwischen der Zwerchaxe a und dem Parameter b, folglich $\sqrt{ab}$ ist, dahero ihr Quadrat ab heißt; so wird $CI^2 = \frac{a^2+ab}{16}$ $= \frac{(a+b)a}{16}$.

Wie man beweise, daß die Asymptoten der Hyperbel niemalen mit der krummen

Tab. IV. Fig. 67.

§. 198. Nun wollen wir auch noch sehen, wie groß die Differenz der zwey Quadrate PM^2 und PR^2 sey, ob sie nemlich beständig und unveränderlich bleibe, oder ob sie nach und nach vermindert und zuletzt = 0 werden könne. DA ist $\frac{1}{2}DE$, folglich, wie wir gezeigt haben $= \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, das ist $DA = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab}$; $CA = \frac{1}{2}a$, $CP = \frac{1}{2}a + x$, wenn $AP = x$, folglich wird nach den Proportionsregeln seyn:

CA

$CA : AD = CP : PR$ das ist

$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR.$ Demnach

$PR = \frac{(\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab})}{\frac{1}{2}a}$ das ist, wenn man wirklich dividirt,

$PR = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a}$, folglich quadrirt,

$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + \frac{bx^2}{a}$

$PM^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$

$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab.$ Also ist die Differenz dieser zwey Quadrate beständig und immer einerley: darum kann es nicht geschehen, daß jemals die Differenz null werde; weil sonsten die Zwerchaxe und der Parameter auch null werden müßten. Ist aber dieses nicht möglich, so kann auch RM niemalen nulle werden, weil sonst $PR^2 - PM^2 = PM^2 - PM^2$ das ist, wirklich null würden. Demnach wenn auch die Linien AM und CR ins unendliche fortgezogen würden, so müßte doch MR immer noch eine positive Zwischenweite bleiben; weil sonsten die Differenz der beeden Quadrate PR^2 und PM^2 folglich auch $\frac{1}{4}ab = 0$ würde, welches unmöglich ist. Folglich kommen die beede Linien, nemlich die gerade CR und die krumme AM einander immer näher, und doch

Linie selbst zusammen fallen, wenn sie auch gleich noch so weit fortgezogen werden;

 fallen

fallen sie niemalen zusammen, indeme immer noch eine Entfernung zwischen beeden bleiben muß. Nun begreifft man die Ursache, warum die griechische Meßkünstler die Linie CR eine Asymptote von der Hyperbel AM genannt haben. Denn eine Asymptote ist eine solche Linie, die einer andern Linie sich immer nähert, und doch niemalen mit ihr sich vereiniget oder zusammenfällt. Aus diesem Grunde hat der Herr von Leibniz die endliche Geister Asymptoten von GOtt genannt; ein Gedanke, welcher in der That nicht nur witzig, sondern auch gründlich ist.

Ursprung des griechischen Namens Asymptote;

Wie ferne Hr. v. Leibniz die endliche Geister Asymptoten von GOtt genannt habe.

Bey der Hyperbel haben wir die einige Frage noch zu erörtern: was ihre Gleichung sey, wenn die Hyperbel gleichseitig (hyperbola æquilatera) wäre? Die Erklärung einer solchen Hyperbel wird uns sogleich auf ihre Eigenschaften führen. Wenn die beede Axen einander gleich sind, so ist die Hyperbel gleichseitig. Folglich wird nach den §. 194. gegebenen Erklärungen $a = \sqrt{ab}$, und $a^2 = ab$, dahero wenn man beederseits mit a dividirt, $a = b$; also sind in einer solchen Hyperbel die beede Axen und der Parameter einander gleich. Da nun die Fundamentalgleichung für alle Hyperbeln ist

Was eine gleichseitige Hyperbel seye.

$y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$, so wird für die gleichseitige, worinnen $a = b$ heraus kommen,

y²

$$y^2 = ax + \frac{ax^2}{a} = ax + x^2.$$

Wenn man endlich die Abscissen in einer der Asymptoten annimmt, und von dem nach Belieben angenommen Punkte mit der andern Asymptote eine Parallellinie bis an die krumme Linie (ad hyperbolam externam) ziehet, welche die Semiordinate vorstellt: so hat man eine Hyperbel zwischen den Asymptoten, (hyperbolam intra asymptotos) in welcher $xy = ab$; wenn nemlich x die in den Asymptoten genommene Abscisse, und y die Semiordinata ad curvam externam bedeutet. Das ist nun alles, was wir von den conischen Sectionen sagen wollten; wir betrachten daher jetzo auch einige andere krumme Linien.

Was eine Hyperbel zwischen den Asymptoten seye.

§. 199. Wir haben in dem ersten Capitel gezeigt, daß sich eine Menge von krummen Linien gedenken lasse; doch finden wir nicht für nöthig, selbige umständlich zu beschreiben. Die Radlinie, das ist griechisch die Trochois oder Cyclois, welche beschrieben wird, wenn sich ein Rad um seine Axe herum bewegt, und durch diese Bewegung sich wirklich fortwälzt, hat in der Mechanik ihren besondern Nutzen. Wir dürfen sie also hier übergehen; um so mehr, da sie und noch andere genannte und ungenannte krumme

Von andern krummen Linien, welche nur angezeigt und genannt werden.

me Linien von höhern Gattungen sind, und nicht wie die conische Sectionen behandelt werden können. Eben so würden wir unserm vorgesetzten Zweck entgegen handeln, wenn wir die Cißoïs, die Conchois, die verschiedene Quadratrices, die Spiral und andere krumme Linien umständlich beschreiben wollten. Eine aber ist noch übrig, deren Eigenschaften eine Aufmerksamkeit verdienen; nemlich die Logistik, oder die logarithmische Linie. Wenn man eine gerade Linie nach Belieben in so viel gleiche Theile theilet, als man will, und aus den Theilungspunkten A, P, N, u. s. w. die Linien AB, PM, NQ in einer continuirlich-geometrischen Verhältniß folglich dergestalten beschreibet, daß AB : PM = PM : NQ u. s. w. so wird die krumme Linie B M Q die logarithmische Linie genannt. Wenn ich nun die Linien AP, AN u. s. w. Abscissen nenne, so werden AB, PM, NQ u. s. w. ihre Semiordinaten seyn. Folglich sind die Abscissen in diesem Falle die Logarithme der Semiordinaten. Denn wenn man von unten anfängt, und z. E. die erste Semiordinate 2, die andere 4, die dritte 8, die vierte 16 ist, u. s. w. so geben die Semiordinaten folgende geometrische Progression:

Warum man sie nicht umständlich beschreibe?

Was die Logistik oder logarithmische Linie sey, und warum von dieser vorzüglich gehandelt werde.

Tab. IV. Fig. 69.

Die Abscissen der Logistik sind die Logarithme der correspondirenden Semiordinaten,

2, 4, 8, 16, 32 u. s. w.

die

die Abscissen
aber diese 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w.
Folglich sind die Abscissen der Logarithme ihrer Semiordinaten: wenn also eine Semiordinate y und die andere z ist, so werden ihre Abscissen ly und lz heissen. Man wird diese Erklärungen im folgenden Capitel wieder gebrauchen, dahero man billig darauf zu merken hat. Aus dem bisherigen sehen wir zugleich, daß die Linie AT, man mag sie verlängern, so weit man will, mit der krummen Linie BMQ nicht zusammen falle, folglich ihr Asymptot sey. Denn wenn eine Semiordinate PM = 0, so wird AB : PM = 1 : 0, das ist unendlich groß werden: folglich müßte auch AP die Abscisse davon unendlich lang seyn; wie man unter andern auch aus der Lehre von den unendlichen Progressionen in Brüchen ersehen kann.

Wie ferne man durch die Logistik eine Asymptote habe;

§. 200. Es ist noch übrig, daß wir von den geometrischen Oertern handeln. Wie es in der Arithmetik unbestimmte Aufgaben giebt, so giebt es auch solche in der Geometrie. Eine Linie, durch welche eine unbestimmte Aufgabe aufgelößt wird, heißt ein geometrischer Ort. Da es nun gerade und krumme Linien giebt, so werden sich die geometrische Oerter auf einer doppelten Seite betrachten lassen. Diejenige geometrische Oerter, welche durch eine

Von geometrischen Oertern;

Erklärung dieser Benennung;

eine gerade Linie oder auch durch den Cir- Was
kel construirt werden; hieß man vor Zei- loca plana
ten loca plana (flache Oerter). So ist
z. E. $y = \frac{ax}{b}$ eine Gleichung für einen fla-
chen Ort: denn wenn $CD = b$, $DE = a$, Tab. II. Fig. 39.
und $CA = x$, so ist $AB = y = \frac{CA \cdot DE}{CD}$
$= \frac{ax}{b}$ weil $CD : DE = CA : AB$, die Auf- und
gabe ist aber unbestimmt, denn alle mit
DE parallelgezogene Linien werden diese
Gleichung auflösen. Wenn aber der
geometrische Ort durch eine Parabel oder loca solida
Ellipse oder Hyperbel u.s.w. construirt wer- seyen;
den muß, so heißt er locus solidus (ein kör-
perlicher Ort). Z. E. wenn man ver-
langt, man solle ein Dreyeck machen, von
derjenigen Beschaffenheit, daß die Sum-
me seiner drey Seiten der Summe der
drey Seiten des gegebenen Dreyecks voll-
kommen gleich sey; so wird diese unbe-
stimmte Aufgabe durch einen geometrischen
Ort an der Ellipsis bestimmt, wie man
aus §. 193. leicht ersehen wird. Das
ist der allgemeine Begriff von den geo-
metrischen Oertern. Nun sieht man
wohl, daß es unendlich viel Fälle gebe,
in welchen dergleichen Aufgaben vorkom-
men. Wenn man aber nur im Stande
ist, aus [illegible]iner Gleichung zu urtheilen,
wo-

wohin sie gehöre, ob sie, wie wir gezeigt, zur Parabel, zur Ellipsis oder zur Hyperbel zu rechnen sey: so wird man die verschiedenen Ausdrücke der Gleichungen unter gewisse Hauptgattungen bringen können. Es giebt aber auch neben dem solche Aufgaben, in welchen die unbekannte Grössen mehr als zwo Ausmessungen haben; da dann freylich die conische Sectionen zur Construktion des Problems nicht zureichend sind. Allein man hilft sich in diesem Falle mit Verbindung zweyer krummen Linien, entweder des Cirkels und der Parabel, oder des Cirkels und der Ellipsis, oder des Cirkels und der Hyperbel u. s. w. **Newton** hat die Vereinigung des Cirkels mit der Ellipsis, **Baker** aber, von dem man die sogenannte Centralregel hat, die Verbindung des Cirkels und der Parabel angerathen. Um nun unsern Lesern einen Begriff davon zu geben, so wollen wir zwo krumme Linien AMB und DMN miteinander verbinden: aus M, wo sie sich durchschneiden, ziehe man die Semiordinate MP auf die Linie AP herab; nun sey in der Linie AMB die Abscisse $x = y^2 + \beta$

Wie man einen geometrischen Ort, wo mehr als zwo Ausmessungen vorkommen, construiren solle; und dißfalls zweyerley krumme Linien verbinden müsse.

Tab. IV. Fig. 72.

Kurzer Begriff von dieser Methode in einem allgemeinen Exempel;

und in der Linie DMN $x = \sqrt{(y^2 + y\gamma)}$

so ist §. 9. $y^2 + \beta = \sqrt{(y^2 + y\gamma)}$

folglich quadrirt $y^4 + 2\beta y^2 + \beta^2 = y^2 + y\gamma$

und auf null reducirt $y^4 + (2\beta - 1)y^2 -$ [illegible] $+ \beta^2 = 0.$

Hier-

Hieraus siehet man nun die Möglichkeit ein, daß durch dergleichen Durchschnitte auch Gleichungen von mehrern Dimensionen construirt werden können. Wir halten uns aber damit nicht auf. Herr Baron von Wolf hat viele Exempel in seinen Elementis davon gegeben. Dem ungeachtet schreibt er T. I. Elem. lat. §. 608. Elem. Analyſ. p. 510. geometricas æquationum constructiones nullius fere in praxi esse usus; cum eidem satisfaciat methodus extrahendi radicem per approximationem. &c. Wir haben daher in den bereits gegebenen Bestimmungen das nöthigste gesagt. Die geometrische Constructionen der Gleichungen haben fast gar keinen Nutzen in der Ausübung: man sucht eben die Wurzeln durch die Approximation; und daran hat man hernach genug. Denn obschon die Kräfte des Verstandes und besonders die Erfindungskunst durch dergleichen Constructionen erhöhet werden können: so glauben wir doch, daß die bisherigen Lehrsätze nach dem uns vorgesetzten Zwecke schon hinlänglich seyen, die Seelenkräften im Nachdenken zu üben, und die Liebhaber der gründlichen Wissenschaften zu vergnügen. Wir dürfen daher auch dieses Capitel, ohne was nöthiges übergangen zu haben, nunmehro beschliessen.

Warum man diese Lehre nicht umständlich vortrage,

und warum sie in der Ausübung nicht gebraucht werde?

Beschluß dieses Capitels.

Viertes Capitel.

Von der Fluxionenrechnung oder von der Kunst zu differentiiren und zu integriren.

§. 201.

Wie man sich die Fluxionenrechnung am gründlichsten vorstellen?

Man kann die Fluxionenrechnung nach der Bedeutung des Namens, den die Engländer dieser Rechnung geben, am besten dadurch beschreiben, wann man sagt: sie bestehe in der Kunst die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher sich eine gegebene Figur verändert. So richtig dieser Begriff ist, so schwer scheinet er besonders für Anfänger zu seyn. Wir wollen uns dahero bemühen, ihn auf der leichtesten und faßlichsten Seite vorzutragen. Der grosse Analyste, Mac-Laurin, welcher als ein zweyter Archimedes die Schottländische Vestung Edinburg wider die mißvergnügte Schotten im Jahr 1746. vertheidigte, und überhaupt durch seine gemeinnützige Arbeiten und Schriften sich einen unsterblichen Ruhm erworben, hat uns zu dieser Erklärung in seinem vortrefflichen Buch unter dem Titel: Treatise of fluxions, Anleitung gegeben. Man betrachte

Tab. I. Fig. 1.

trachte das Viereck ABCD, und setze AD = x, DC = y; vx bedeute die Geschwindigkeit des Punktes D, bey Beschreibung der Linie AD; und vy die Geschwindigkeit des Punkts C, indem er die Linie DC beschreibet. Nach Verfliessung einer willkührlichen Zeit, die endlich seyn mag, sey aus AD Ai, und aus DC Df oder ig geworden. Jetzo suche man die Geschwindigkeit, mit welcher das ganze Rectangulum sich verändert hat; das Rectangulum selbst heißt AD. DC = xy. Nun fragt man: wie geschwinde DC — y fortrücken müsse, daß die Gleichheit immer bleibe, oder daß in unendlich kleinen Zeittheilen wie in grössern das wachsende Rectangulum AC sich immer ähnlich bleibe? so wird man antworten: mit der Geschwindigkeit des Punkts D = vx; eben so wird sich die Linie AD = BC = x, die sich zu Erhaltung der Aehnlichkeit nach ef bewegt, mit der Geschwindigkeit des Punkts C = vy bewegen müssen. Demnach ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das ganze Rectangulum verändert, $= v(xy) = y.vx + x.vy$. Denn wenn sich diese beede Linien mit einer andern Geschwindigkeit bewegten, so würde die eine früher oder später als die andere an den Ort und Stelle, wohin man sie haben will, kommen; folglich die Aehnlichkeit, welche auch in dem kleinsten Zeitpunkt

und wie man diese Vorstellung den Anfängern zu lieb, wenn sie auch keine Mechanik verstehen, in einen faßlichen Vortrag einkleiden könne;

und wie diese ganze Lehre von dem Begriffe der Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Figur verändert, abhange.

punkt der Veränderung erhalten werden muß, unterbrochen werden. Wenn sich aber AD mit der Geschwindigkeit von DC, und DC mit der Geschwindigkeit AD, das ist x mit der Geschwindigkeit von y, und y mit der Geschwindigkeit von x beweget, so bleibt das Rectangulum immer sich selbst gleich, und dem noch nicht veränderten in einem jeden Zeitpunkte der Veränderung ähnlich; demnach ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Rectangulum xy verändert, $xvy + yvx$, ohne daß man nöthig hätte, etwas entweder als unendlich klein anzusehen, oder wegzuwerfen, oder gar für ein absolutes Nichts zu halten. Wären die Linien AD und DC einander gleich, so ist $x = y$, folglich $xy = x^2$, dahero in diesem Fall die Veränderung des Quadrats, $xvx + xvx = 2xvx$ u. s. w. Nun hat man in Deutschland den Raum, der sich mit dieser Geschwindigkeit verändert, nicht mit dem Buchstaben v sondern d ausgedruckt, und eine Differentialgrösse genannt: dahero $xvy + yvx$ bey uns ausgedruckt wird durch $xdy + ydx$; und $2xvx$ heißt $2xdx$ u. s. w. Den Ursprung dieser Benennung und des Differentialnamens wollen wir sogleich zeigen.

auch bey diesem Begriff nicht nöthig habe, etwas als unendlich klein anzusehen oder gar für ein absolutes Nichts zu halten.

Grosser Vortheil dieser Lehrart nebst ihrer Anwendung auf die Rechnung selbst.

§. 202. Bey einzelen Grössen, die nicht multiplicirt oder dividirt werden, hat

die Sache gar keine Schwürigkeit: denn die Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Linie AD = x bewegt, ist eben vx. Grössen, welche durcheinander dividirt werden, reducirt man auf die Multiplication; folglich wird man den Grund der ganzen Fluxionenrechnung verstehen, wenn man das, was wir §. 201. vorgetragen haben, sich gründlich bekannt macht. Wir wollen aber jetzo die gewöhnliche und in Deutschland eingeführte Methode, wie man diese Rechnung ansiehet, kürzlich erzehlen. Man sagt, es wachsen einer veränderlichen Linie, wenn sie grösser wird, immer unendlich kleine Theile an; oder wenn sie kleiner wird, so nehmen sie um solche unendlich kleine Theile ab. Einen solchen unendlich kleinen Theil nennt man das Differentiale von x, y, u. s. w. nemlich dx, dy. Nun wollen wir die um den unendlich kleinen Theil Di vermehrte Linie AD + Di nennen x + dx, und die um Cf vermehrte Linie DC heissen wir aus gleichem Grunde y + dy: diese zwo Grössen sollen nun miteinander multiplicirt werden; da es dann nach den Regeln geht, indem

Wie man diese Rechnung in Deutschland vortrage.

und was Differentialgrössen heissen.

Tab. I. Fig. 1.

Erklärung der bey uns angenommenen Lehrart.

$$\begin{array}{r} x + dx \\ y + dy \\ \hline xy + ydx + xdy + dxdy. \end{array}$$

Dieses Product ist erstlich das Rectan-

gulum

gulum ADCB = AD . DC = xy; be=
ziehe ich also ab, weil ich nur zu wissen verlange, um wie viel es verändert worden sey: folglich bleibt, nach Abzug des Rectanguli xy, übrig ydx + xdy + dxdy; das aber, was in der Subtraction übrig bleibt, heißt man die Differenz. Darum nennen die Deutschen diese Rechnung eine Differentialrechnung; und ydx + xdy + dxdy heißt dahero die Differentialgrösse von xy. Weil aber dxdy, welches das kleine Viereck chgf ist, gegen BCfe = xdy und DChi = ydx unendlich klein und wie nichts zu rechnen ist, so wirft man auch dieses hinweg, und sagt, die Differentialgrösse von xy ist xdy + ydx. Nun lasse ich vernünftigen Lesern das Urtheil über das weggeworfene dxdy selbst über; wenn sie die Figur ansehen, so werden sie sagen, die Differenz zwischen dem veränderten und noch nicht veränderten Rectangulo sey BefC + fghC + DChi, und nicht allein BefC + DChi; oder blos ydx + xdy. Das Viereck Cfgh mag noch so klein seyn, als es will, so ist es doch etwas, das die so accurate Meßkünstler nicht wegwerfen sollten; will man es aber beybehalten, so gibt es in der Rechnung nicht nur Schwürigkeiten, sondern es würde auch manches falsches herauskommen, welches vermieden wird, wenn man das

Warum man diese Rechnung eine Differentialrechnung heisse.

Einige Schwürigkeiten, die einem bey der gemeinen Erklärung billig einfallen müssen, werden kürzlich vorgetragen, da dann das Urtheil dem vernünftigen Leser überlassen wird, ob er lieber der englischen oder deutschen Erklärungsart dißfalls beypflichten wolle.

dxdy wegwirft. Die Sache hat also an und vor sich selbst ihre Richtigkeit und hält die Probe; nur ist die Art und Weise, wie man sie erklärt, nicht die beste. Einige haben dahero das dx und dy für absolute Nullen angesehen; in welchem Fall ich freylich dxdy wegwerfen muß, weil nulle mal nulle allemal nichts ist: allein ich müßte in diesem Fall auch ydx und xdy wegwerfen, weil nulle mal y so gut nichts ist als nulle mal nulle. Allen diesen Einwendungen entgehet man glücklich, wenn man dasjenige, was ich §. 201. gesagt habe, bey dieser Materie zu Grund legt, und die Differentialien als die Geschwindigkeiten ansieht, mit welchen sich eine Grösse verändert. Die Sache ist so überzeugend, als irgend ein Beweis seyn kann. Ueberhaupt werden die Maclaurinische Schriften, mit welchen mich der berühmte Herr Prof. Kästner bekannt gemacht hat, allen denjenigen ein Genüge leisten, welche auch diese Rechnung gründlich verstehen wollen. Inzwischen werden wir künftighin die in Deutschland eingeführte Namen beybehalten, und statt Fluxionen, immer Differentialrechnung sagen; nur muß man, wie wir gezeigt, den Grund von der Richtigkeit dieser Rechnung aus dem mehrmalen angeführten §. voraussetzen, und sich recht bekannt machen.

Warum man die unendlich kleine Theile nicht als absolute Nullen ansehen könne;

und wie man allen Einwendungen bey der Lehrform der Engländer entgehe.

Warum man aber nichts destoweniger die in Deutschland eingeführte Namen und Zeichen beybehalte.

§. 203.

§. 203. Nunmehro können wir die Kunst zu differenziren auf die vier Rechnungsarten anwenden. Es gibt veränderliche und unveränderliche Grössen. Jene allein kann man differenziren, weil Differenziren eigentlich nichts anders ist, als anzeigen, daß und wie eine Grösse verändert worden sey. Von einer unveränderlichen Grösse kann ich also nicht sagen, daß oder wie sie verändert werde, weil sie unveränderlich ist. Das heißt, ihr Differentiale ist nichts: z. E. das Differentiale vom Parameter ist nichts, oder der Parameter hat kein Differentiale, oder auch der Parameter kann weder grösser noch kleiner werden. In diesem Verstande sagt man, die Differentialen der beständigen und unveränderlichen Grössen seyen Nullen; nicht als ob die Grösse selbst in Nulle verwandelt wäre, sondern weil sie wirklich keine Fluxion hat, und, wenn ich ihr eine zuschreiben wollte, sie wirklich = o wäre. Diesemnach ist das Differentiale von a = da = o, weil man bekannter massen die beständige Linien durch die erstere Buchstaben des Alphabets ausdruckt. Solche beständige Linien sind nun die Radii eines Cirkels, der Diameter, der Parameter in den conischen Sectionen, die Axen in den Ellipsen und Hyperbeln u. s. w. deren Differential jedesmal = o. Hingegen die Abscissen, die

Anwendung der Differentialkunst auf die vier Rechnungsarten.

Warum und wie ferne das Differentiale einer unveränderlichen Grösse nulle oder nichts seye?

eine Benennung, welche von allen Mißdeutungen gerettet wird.

Was dergleichen beständige oder unveränderliche Grössen, und was die veränderliche seyen, wird angeführt.

Semiordinaten u. s. w. sind lauter veränderliche Linien, welche folglich sich differenziren lassen, und deren Differentialgrössen wirkliche Grössen sind. Wenn also die Absciſſe x heisset, so ist ihr Differentiale dx, und die Semiordinate y hat zum Differentiale dy. Sollte man demnach $x + y$ differenziren, so hiesse es eben $dx + dy$, und $x - y$ wird differenzirt $dx - dy$ heissen; $x + a$ heißt differenzirt $dx + 0 = dx$; ferner $x + a - z$ gibt differenzirt $dx + 0 - dz = dx - dz$. u. s. w.

Von Differentirung derjenigen Grössen, die addirt und subtrahirt werden.

Bey der Multiplication haben wir schon gezeigt, wie man zu Werke gehe, als welches der einige Fall ist, der schwer scheinet: alle Schwürigkeiten aber verliehren sich auf einmal, wenn man die Maclaurinische Erklärung genau überdenkt, und einsiehet, daß das Rectangulum xy differentiirt wird, wenn man x in die Geschwindigkeit von y, die wir dy nennen, und y in die Geschwindigkeit von $x = dx$ multiplicirt, und die beede Partialproducte addirt. Also ist $xy = xdy + ydx$; $xz = xdz + zdx$, $tu = tdu + udt$ u. s. w. Man multiplicirt nemlich einen jeden Factor in das Differentiale des andern, und addirt die Partialproducte. Auf diesen Fall wird nun auch die Differentiirung dreyer Factorum reducirt, da man je zween und zween in das Differentiale des dritten

Wie man die miteinander multiplicirte Grössen differentiire;

Allgemeine Regel bey der Multiplication.

muls

multiplicirt. Z. E. man solle xyz differenziren. Nun setze man

$$xy = t \quad \text{so ist}$$
$$\underline{\qquad\qquad} \cdot z$$
$$xyz = tz \quad \text{folglich}$$
$$d(xyz) = tdz + zdt$$

Nun ist $xdy + ydx = dt$

folglich

substituirt $d(xyz) = tdz + xzdy + yzdx$

und weil $t = xy$

$$d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx.$$

Wenn dahero vier Factores vorkämen, so werden je drey und drey allemal in das Differentiale des vierten multiplicirt u. s. w.

Von der Differentiation der Potenzen, und wie sich diese auf die Multiplicationsregel reduciren lasse.

§. 204. Die umständlich bewiesene Regel, multiplicirte Grössen überhaupt zu differentiiren, wird uns nun auch bey der Differentiation der Potenzen zu statten kommen. Wenn ich xx differenzire, so bekomme ich $xdx + xdx = 2\,xdx$. Differenzire ich xxx, so habe ich $xxdx + xxdx + xxdx = 3xxdx = 3x^2dx$; folglich wird x^4 differentiirt geben $4x^3dx$, x^5 gibt $5x^4dx$ u. s. w. Man multiplicirt also das Differentiale der ersten Potenz in das Product des Exponenten und der gegebenen Potenz, deren Exponent aber um eins vermindert wird. Denn aus den gegebenen Exempeln erhellet, daß

Allgemeine Regel für diesen Fall;

samt dem Beweis.

die Differentialgrösse einer Potenz entstehe, wenn man den Exponenten der Potenz um eins vermindert, und sodann diese erniedrigte Potenz mit dem Differentiale ihrer ersten Dignität multiplicirt, und das ganze Product nochmalen mit dem unverminderten Exponenten multiplicirt.

Anwendung auf allgemeine Exempel,

Demnach ist das Differentiale von $x^m = mx^{m-1}dx$, und das Differentiale von $x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$; wenn man nemlich $\frac{m}{n} - 1$ unter einerley Benennung bringt nach §. 67. Ferner weil die Wurzeln allemal in Dignitäten verwandelt werden, deren Exponenten Brüche sind, §. 58. so wird das Differentiale von $\sqrt[m]{x^n}$ = Diff. von $x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m}} dx = \frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx$. Eben so ist $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

besonders auch auf die Wurzelgrössen.

folglich sein Differentiale $\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{2} x^{\frac{1-2}{2}} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$. Weil ferner $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ und überhaupt $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, so ist das Differentiale von $\frac{1}{x}$ oder $x^{-1} = -1 . x^{-2}dx = -$

x.

$x^{-2}dx$; das Differentiale von $\frac{1}{x^2}$ oder $x^{-2} = -2x^{-3}dx$, und überhaupt das Differentiale von $\frac{1}{x^m}$ oder $x^{-m} = -mx^{-m-1}dx$. Endlich da auch $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}} = x^{-\frac{n}{m}}$ so wird das Differentiale von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ oder $x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}dx = -\frac{1}{2}x^{\frac{-1-2}{2}}dx = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx$; und das Differentiale von $\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$ oder $x^{\frac{-n}{m}} = -\frac{n}{m}x^{\frac{-n-1}{m}}dx = -\frac{n}{m}x^{\frac{-n-m}{m}}dx$.

§. 205. Wie nun alle diese Gleichungen aus der einigen Regel, ein Product zu differenziren, hergeleitet werden: so werden wir nun auch aus eben dieser Regel lernen, wie man Grössen differenzirt, davon eine die andere dividirt. Es seye $\frac{x}{y}$ zu differenziren. Wir wissen aus dem ersten Theil noch, daß $\frac{x}{y} = x . \frac{1}{y}$, und weil allemal $\frac{1}{y} = y^{-1}$, so ist $\frac{x}{y} = x . y^{-1}$.

Wie man Grössen, davon eine die andere dividirt, differenzire; und wie auch diese Kunst auf die Multiplicationsregel ganz reducirt werde;

Diesen Ausdruck können wir nun leicht nach der Multiplicationsregel differenziren. Das Differentiale von x ist dx, und das von y^{-1} ist $-1 . y^{-2}dy = -y^{-2}dy$; folglich heißt das Differentiale des ganzen Products $y^{-1}dx + x . -y^{-2}dy = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = d . \frac{x}{y}$. Nun ist $y^{-1} = \frac{1}{y}$ und $y^{-2} = \frac{1}{y^2}$; wenn man nun gleiches für gleiches substituirt, so heißt die obige Gleichung $\frac{1}{y}dx - \frac{xdy}{y^2} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx}{y^2} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2} =$ Diff. $\frac{x}{y}$. Wenn man also das Differentiale der zu dividirenden Zahl mit dem Divisor multiplicirt, und von dem Producte das mit der zu dividirenden Zahl multiplicirte Differentiale des Divisors subtrahirt, und den Rest durch das Quadrat des Divisors multiplicirt, so hat man zwo einander dividirende Grössen differenzirt; folglich kann man auch alle Brüche differenziren, weil zwo einander dividirende Grössen nichts anders als ein Bruch sind. Ein Bruch wird dahero differentiirt, wenn man das Differentiale des Zehlers mit dem Nenner multiplicirt, und hernach das mit dem Zehler multiplicirte Differentiale des Nenners davon subtrahirt,

Von der Differentiation der Brüche, welche auf gleichem Grunde beruhet.

hirt, hernach alles mit dem Quadrate des Nenners dividirt.

§. 206. Nunmehro werden unsere Leser überzeugt seyn, daß die ganze Kunst auf die Differentiirung des Rectanguli xy ankomme, und daß man alle mögliche Grössen differentiiren könne, wenn man den Fundamentalbegriff von Differentiirung des xy verstehet. Wir glauben dahero die Beschuldigung von uns ablehnen zu können, daß wir ohne Noth in Bestimmung der Grundideen der Differenzirkunst weitläuftig gewesen seyen. Uebrigens werden die Differentialgrössen durch die Integrirung wieder aufgehoben, wie wir im folgenden zeigen. Wie z. E. x^3 differenzirt, $3x^2dx$ gibt, so ist von diesem Differentiale das Integrale wiederum x^3, welches gefunden wird, wenn man den Exponenten um eins vermehrt, und hernach alles mit dx und dem um eins vermehrten Exponenten dividirt. So ist das Integrale von $3x^2dx = \frac{3x^{2+1}dx}{3dx} = x^3$; und das Integrale von $\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx$

$$= \frac{\frac{n}{m} x^{\frac{n-m+1}{m}} dx}{\frac{n}{m} dx} = x^{\frac{n-m+1}{m}} = x^{\frac{n-m+m}{m}} = x$$

Aus dem bisherigen erhellet, daß die Differentiation eines Rectanguli oder xy der Grund von dieser ganzen Lehre sey: dahero man in Bestimmung dieses Grunds nicht ohne Noth weitläuftig war.

Vorläufige Anzeige, wie durch die Integration die Differentiation wieder aufgehoben werde.

$= x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$. u. s. w. Diese Formel kommt am häufigsten vor; wir haben dahero selbige um so eher vorläufig anzuzeigen für gut befunden. Uebrigens solle auch diese Kunst im folgenden umständlich vorgetragen und erläutert werden.

Wer der Erfinder dieser schönen und gemeinnützigen Rechnung sey?

§. 207. Jetzo müssen wir doch auch fragen: wer der Erfinder von dieser so schönen und gemeinnützigen Rechnung gewesen sey? In England schreibt man sie dem Newton, und in Deutschland dem Leibniz zu. Inzwischen kann man nicht läugnen, daß Isaac Barrowius, ein gleich grosser Theolog und Meßkündiger, unter welchem Newton zu Cambridge die mathematische Wissenschaften studierte, folgende Proportion aus einer von ihm angegebenen Figur geschlossen, und in seinen Lectionibus opticis & geometricis vorhero schon, ehe Newton und Leibniz was schrieben, bekannt gemacht habe.

und wie ferne Isaac Barrow, der Lehrer Newtons, den Grund dazu gelegt habe.

Tab. IV. Fig. 71.

Die Erfindung Barrowii wird erklärt,

Man beschreibe eine krumme Linie AM, die ihre convexe Seite gegen eine gerade Linie AP kehre; hernach ziehe man die Tangente TM, und ziehe die Semiordinate PM; wenn nun pm mit PM parallel und ihm so nahe gezogen wird, daß der Bogen Mm von der geraden Linie nicht abweicht, so wird die Subtangente PT gefunden werden, wenn man sagt:

$$MR : Rm = MP : PT$$

oder in den von Barrow gesetzten Buchstaben: $e : a = y : \frac{ay}{e}$

das heißt mit unsern Buchstaben $dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$

Das ist nun ein Fundamentalausdruck, dessen Fruchtbarkeit wir sogleich finden werden. Leibniz hat deßwegen das △ MRm ein Triangulum characteristicum genannt, weil man mit Zuziehung der Gleichungen der krummen Linie durch dasselbe solche Eigenschaften in Rucksicht auf die Subtangente entdeckt, welche erst die Differentialrechnung brauchbar und gemeinnützig machen. Nun ist freylich diese einige Barrowische Figur bey weitem noch nicht dasjenige, was die Fluxionenrechnung in sich faßt; allein für einen Newton und Leibniz war es schon genug. Geister von diesem Range können aus einem einigen Umstand und noch so kleinen Fingerzeig weiter schliessen. Und das ist es auch, was wir in Absicht auf die Erfindung dieser Rechnung sagen wollten. Wäre kein Newton und Leibniz gekommen, so würde der Barrowische Lehrsatz vielleicht lange ungenützt geblieben seyn, wie die Newtonische und Leibnitzische Erfindung selbst noch jetzo nicht so hoch geachtet würden, wenn keine Euler und Bernoulli nach der Hand erst durch

und gezeigt, daß sie mit demjenigen, was Herr v. Leibniz das Triangulum characteristicum genannt habe, völlig übereinkomme.

Warum aber dem ungeachtet Newton und Leibniz den größten Antheil an der völligen Erfindung dieser Rechnung haben.

durch ihre neue Entdeckungen dieser brauchbaren Rechnung einen bleibenden Namen, sich selbst aber einen unsterblichen Ruhm gemacht hätten.

Anwendung dieser Rechnung auf die höhere Geometrie.

§. 108. Wir haben von der Erfindung dieser Kunst das nöthigste gesagt. Es ist also nichts mehr übrig, als daß wir jetzo die Anwendung davon zeigen. Das Barrowische Dreyeck, oder des Herrn v. Leibniz Triangulum characteristicum verdienet zuerst und vor allen andern unsere Aufmerksamkeit.

Tab. IV. Fig. 70.

Allgemeine Regel, wie man durch Hülfe des Barrowischen Dreyecks aller krummen Linien Subtangenten ausdrücken könne;

Wenn man bey einer krummen Linie AM, sie mag für eine Beschaffenheit haben, was sie für eine will, die Abscissen AP, ferner die Semiordinate PM, und sodann mit der über den Scheitelpunkt verlängerten Abscisse PT die Tangente der krummen Linie, nemlich die Tangente TM in dem Punkte T vereiniget, so wird man dieses Dreyeck bald bekommen. Denn man darf nur die der Semiordinate PM nächste Semiordinate pm, und sodann mit Pp aus dem Punkt der krummen Linie M die Parallellinie MR ziehen, so ist das ΔMRm dieses verlangte Dreyeck. Denn nach den Grundsätzen der Aehnlichkeit ist das $\Delta MmR \sim \Delta TMP$ oder Tmp; folglich wenn $PM = y$ und $AP = x$, so ist
$Rm = dy$ und $MR = Pp = dx$, folglich da $mR : RM = PM : PT$,
das ist $dy : dx = y : PT$;

so

so ist die Linie PT $= \frac{y\,dx}{dy}$.

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für alle Linien dieser Gattung; man heißt sie Subtangenten. Eine Subtangente PT ist allemal diejenige gerade Linie, welche durch die Tangente TM und die Semiordinate PM bestimmt wird; und bey allen nur denkbaren krummen Linien wird sie durch $\frac{y\,dx}{dy}$ ausgedruckt. Wenn man nun in einer gegebenen krummen Linie den Werth von $\frac{dx}{dy}$ u. s. w. durch die Differentiation suchet, so wird sich die Subtangente in endlichen Grössen bestimmen lassen. Wir wollen ein Exempel von der Parabel geben. Man solle die Subtangente bestimmen. Die Subtangente aller krummen Linien heißt $\frac{y\,dx}{dy}$; folglich muß ich aus der Gleichung für die Parabel, welche $ax = y^2$ ist, einen Wehrt, der dem obigen Ausdruck gleich ist, durch die Differentiation suchen. In der Parabel ist $ax = y^2$

und wie man aus dem Ausdruck hernach die Subtangente selbst in endlichen Grössen finde.

Anwendung auf die Subtangente der Parabel.

folglich differenzirt: $a\,dx = 2y\,dy$

$$\overline{} : a$$

$$dx = \frac{2y\,dy}{a}$$

$$\overline{} \cdot y$$

y dx

$$ydx = \frac{2y^2dy}{a}$$

$$\overline{} :dy$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y}{a}$$

Denn damit ich die Subtangente $\frac{ydx}{dy}$ bekomme, so muß ich dx und seinen Wehrt in der Parabel, das ist die ganze Gleichung beederseits mit y multipliciren, und hernach das Product mit dy beederseits dividiren. Die Subtangente in der Parabel ist also $= \frac{2y^2}{a}$; diese aber läßt sich schicklicher ausdrucken: denn weil in der Parabel $ax = y^2$, so ist

$$2ax = 2y^2 \text{ und}$$

$$\overline{} : a$$

$$\frac{2ax}{a} = \frac{2y^2}{a}$$

das ist, wenn man wirklich dividirt. $2x = \frac{2y^2}{a} = PT.$

Die doppelte Abscisse ist allemal der Subtangente in der gemeinen Parabel gleich;

Also ist in der Parabel die Subtangente allemal $2x$, oder die doppelte Abscisse, oder noch einmal so groß als die Abscisse. Oder allgemein, weil in den Parabeln

$$a^{m-1}x = y^m$$

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy$$

$$dx = \frac{my^{m-1}dy}{a^{m-1}}$$

$$\cdot \frac{y}{dy}$$

Wie diese Regel auf Parabeln von höhern Gattungen angewendet werde?

$\frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{a^{m-1}}$ Nun ist

$y^m = a^{m-1}x$ folglich

$$\frac{my^m}{a^{m-1}} = \frac{ma^{m-1}x}{a^{m-1}} = mx.$$

Die Subtangente in der Parabel ist also die Absciſſe so vielmal genommen, als der Exponent von der Semiordinate y Einheiten hat.

Von der Subnormallinie, was sie sey, und wie sie gleichfalls durch einen allgemeinen Ausdruck in allen krummen Linien bestimmt werde;

§. 209. Wie man die Subtangente durch die Differentialrechnung finden kann, so findet man auch die Subnormallinie. Wir müssen vor allen Dingen erklären, was wir unter dieser Linie verstehen. Wenn man auf den Punkt M der Tangente TM eine Perpendicularlinie HM dergestalt aufrichtet, daß sie endlich mit der Absciſſe AH in dem Punkt H zusammen kommt: so heißt MH die Normal- und PH die Subnormallinie, welche durch die Semiordinate PM und die Normallinie MH bestimmt wird. Bey M ist also, wie aus der Construction er-

Tab. IV. fig. 70. 66.

hellet, ein rechter Winkel. Demnach ist $PT : PM = PM : PH = \frac{PM^2}{PT}$

das ist $\frac{ydx}{dy} : y = y : PH = \frac{y^2}{\frac{ydx}{dy}}$

Da nun $y^2 : \frac{ydx}{dy} = y^2 . \frac{dy}{ydx} = \frac{y^2dy}{ydx} = \frac{ydy}{dx}$, so ist die Subnormallinie bey allen nur denkbaren krummen Linien $= \frac{ydy}{dx}$. Man kann also aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie ihre Subnormallinie bald finden. Es sey z. E. wieder die Parabel, in welcher

$$ax = y^2$$

differentiirt $adx = 2ydy$

$$\overline{\qquad\qquad} : 2y$$

$$\frac{adx}{2y} = dy$$

$$\overline{\qquad\qquad} . y$$

$$\frac{aydx}{2y} = \frac{adx}{2} = ydy$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : dx$$

$$\frac{adx}{2dx} = \tfrac{1}{2}a = \frac{ydy}{dx}$$

In der Parabel ist die Subnormallinie dem halben Parameter gleich.

Demnach ist in der Parabel die Subnormallinie dem halben Parameter gleich, folglich eine beständige Linie. Da nun in

in der Parabel, nach der 66. Fig. und dem §. 189. gegebenen Beweis $AF = \frac{1}{4}a$, so wird $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$, folglich $FH = FP + PH = x - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a = x + \frac{1}{4}a$. Da aber auch nach §. 189. $FM = x + \frac{1}{4}a$, so ist $FM = FH$, folglich das Dreyeck FMH gleichschenklicht. Weil ferner $TP = 2x$ nach §. 208. folglich weil $AP = x$, auch $TP = x$, und dahero $TF = x + \frac{1}{4}a$, so ist auch $TF = FM = FH$; folglich kann aus F mit dem Radio TF ein Cirkel beschrieben werden, der durch die drey Punkte T, M und H gehen wird. Hieraus erhellet weiter, daß, weil das Δ FMH gleichschenklicht, und dahero die Winkel FMH und FHM einander gleich sind, auch der Winkel

Tab. IV. Fig. 66.

Einige wichtige Eigenschaften der Parabel werden hieraus noch erwiesen;

mMQ = TMF; denn
TMH = HMm als rechte Winkel;
FMH = HMQ weil FMH = FHM und
———————— FHM = HMQ;
folglich
TMH − FMH = HMm − HMQ das ist
TMF = mMQ.

Warum alle in einen parabolischen Spiegel fallende Strahlen gegen den Brennpunkt gebrochen werden, und darinnen zusammen fallen müssen;

Dahero müssen alle in einen parabolischen Spiegel einfallende Strahlen gegen den Brennpunkt F gebrochen und daselbst vereinigt werden; welches auch die Erfahrung nach den Grundsätzen der Optik lehret.

Wie man bey andern krummen Linien die Subtangenten und Subnormalen finde, wird durch einige Exempel erläutert.

§. 210. Auf eine ähnliche Weise findet man bey andern krummen Linien die Subtangente und Subnormallinie. Z. E. bey den Ellipsen ist

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \text{ folglich}$$

$$ay^2 = abx - bx^2 \text{ und differentiirt}$$

$$2aydy = abdx - 2bxdx = (ab - 2bx)dx \quad : ab - 2bx$$

$$\frac{2aydy}{ab - 2bx} = dx$$

$$\cdot \frac{y}{dy}$$

$$\frac{2ay^2}{ab - 2bx} = \frac{ydx}{dy}, \text{ oder wenn}$$

man den Wehrt von $2ay^2$ substituirt,

$$\frac{2abx - 2bx^2}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{ydx}{dy}$$

= der Subtangente. Eben so ist im Circkel $ax - x^2 = y^2$ folglich

$$adx - 2xdx = 2ydy \quad : a - 2x$$

$$dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$$

$$\cdot \frac{y}{dy}$$

ydx

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a-2x}$$, das ist, wenn man gleiches für gleiches setzet,

$$\frac{2ax-2x^2}{a-2x} = \frac{ax-x^2}{\frac{1}{2}a-x}$$

die Subtangente des Cirkels; und seine Subnormale ist, weil nach der bereits gesuchten Differentiation,

$$adx - 2xdx = 2ydy \quad \text{oder}$$
$$(a-2x)dx = 2ydy \quad \text{und}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : dx$$
$$a - 2x = \frac{2ydy}{dx}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : 2$$
$$\frac{1}{2}a - x = \frac{ydy}{dx}$$

der halbe Diameter weniger die Abscisse; folglich fangen sie alle in dem Mittelpunkt an, weil $\frac{1}{2}a$ dem Radius gleich ist, und man in der gegebenen Gleichung die Abscissen von dem Scheitelpunkt an rechnet. Unsere Leser sehen aus diesen Exempeln schon, wie weit sich diese einige Aufgabe von den Subtangenten und Subnormallinien erstrecke; wir wollen dahero nicht ohne Noth weitläuftig seyn, und nur die einige Logistik noch betrachten.

Von dem weiten Umfang dieser Lehre.

Tab. IV. Fig. 69.

Warum man besonders von der logarithmischen Linie noch handle, und ihre Subtangente bestimme?

§. 211. Man ziehe die Tangente der logarithmischen Linie TM, so ist, wenn, wie in der Fig. 70. die übrige Linien gezogen werden,

$$MR : Rm = PM : PT, \text{ das ist}$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Eben so wird bey einer jeden grössern oder kleinern Abscisse v, und Semiordinate z, die correspondirende Subtangente seyn $\frac{zdv}{dz}$. Nun gehen die Abscissen der Logistik in einer geometrischen Progression fort, folglich sind ihre Differentialien einander gleich; denn die Geschwindigkeit, mit deren sie sich verändern, ist immer einerley; oder anders die Sache auszudrucken, die Differenz in einer arithmetischen Proportion ist immer eben dieselbe, sie mag noch so groß oder noch so klein seyn. Demnach ist $dv = dx$. Die Semiordinaten hingegen haben in der Logistik kraft der gegebenen Erklärung eine geometrische Verhältniß zu einander; das ist, wenn sie y und z heissen;

Ausführlicher Beweis, daß die Subtangente der Logistik eine unveränderliche Linie sey.

$y : z = y + dy : z + dz$ oder versetzt,

$y : y + dy = z : z + dz$ folglich auch §. 60.

$y : (y + dy) - y = z : (z + dz) - z$ das ist

$y : dy = z : dz$, oder

y

$\frac{y}{dy} = \frac{z}{dz}$ Nun ist

$dx = dv$ folglich multiplicirt

$\frac{ydx}{dy} = \frac{zdv}{dz}$. Da nun diese beede

Ausdrücke Subtangenten anzeigen; so folgt daraus, daß alle Subtangenten der Logistik einander gleich, und also ihre Subtangenten eine beständige Linie seyen. Weitere Anwendungen wollen wir von dieser Gattung der Differentialgleichungen nicht anführen. Unsere Leser begreiffen von selbsten, daß es noch eine Menge geben werde, die aber alle mit dem gegebenen eine Aehnlichkeit haben. Wir handeln daher jetzo eine andere Differentialmaterie ab, welche mit dem sogenannten **Maximo** und **Minimo** sich beschäfftiget.

Erklärung derjenigen Grössen, welche ein Maximum und Minimum haben;

§. 212. Wenn eine Grösse so lang wächset, bis sie auf einen gewissen Grad oder Punkt kommt, und hernach entweder stille steht, oder wieder abnimmt: so sagt man von ihr, sie habe ein **Maximum**. So hat diejenige krumme Linie, welche man den Cirkel nennet, ein Maximum: denn wenn sie sich so weit von dem Diameter entfernet hat, daß ihre Distanz seiner Hälfte gleich ist, so hat sie ihr Maximum erreichet, und kehret von

Was bey den Cirkeln und Ellipsen das Maximum sey.

selbigem Punkt an wiederum näher zur Axe oder zum Diameter. Eben so hat die Ellipsis ein Maximum. Die Parabeln und Hyperbeln hingegen wachsen unendlich fort, oder entfernen sich von ihrer Axe bis ins unendliche: man kann also nicht sagen, daß sie ein Maximum haben; ausser wenn man sagen wollte, die unendliche Entfernung von der Axe sey ihr Maximum. Dieser Ausdruck aber gehört nicht hieher. Ein Minimum ist, wenn eine Grösse sich bis auf einen gewissen Grad vermindern läßt, oder kleiner wird, hernach aber entweder stille steht, oder aber wieder grösser wird. Bey krummen Linien bedient man sich zu Bestimmung der Sache der Semiordinaten und Abscissen, z. E. man sagt, die größte Semiordinate vom Cirkel ist der Radius, u. s. w. Bey andern Figuren kann man das Maximum oder Minimum überhaupt betrachten. Z. E. wenn ich frage, wie muß ich eine Linie theilen, daß durch die Multiplication der beeden Theile das größte Viereck, das aus dieser Linie mögliche ist, entstehe? oder wie muß der Zimmermann einen gegebenen Balken hauen, daß der Balkenkopf das allergrößte Viereck, das sich daraus hauen läßt, vorstelle? oder welches ist das größte Dreyeck, das in einen halben Cirkel beschrieben werden kann? u. s. w. Aus allen diesen

Wie fern eine Grösse ein Minimum habe.

Wie man das Maximum und Minimum überhaupt betrachten, und am faßlichsten sich vorstellen könne;

Er-

Erklärungen und Exempeln begreifft man nun leicht, daß das Differentiale von einem Maximo oder Minimo allemal null seyn werde. Denn wenn es das Maximum seyn solle, so ist es ja, in so fern es das Maximum ist, unveränderlich, und kann weder grösser noch kleiner werden; eine beständige oder unveränderliche Grösse aber hat kein Differentiale, oder sein Differentiale ist allemal nulle; folglich wenn eine solche Grösse, die ein Maximum oder Minimum seyn solle, differentiirt wird, so muß ich ihr Differentiale allemal = o setzen; da sich denn bald ihre Grösse ergeben wird.

Warum das Differentiale von einem Maximo oder Minimo nulle sey? wird bewiesen.

§. 213. Nun habe ich den Begriff von dem, was ein Maximum oder Minimum heißt, hinlänglich erklärt. Wenn man demnach die Linie DE also theilen sollte, daß der eine Theil die Grundlinie, und der andere die Höhe des größten Vierecks, das sich daraus bestimmen läßt, abgeben sollte, so wird sich die Frage bald auflösen lassen. Man nenne DE=a, und weil wir den Punkt, wo sie getheilt werden solle, noch nicht wissen, so wollen wir die Grundlinie DC = x nennen; folglich wird die noch übrige Linie, oder die Höhe des Vierecks a — x, und das ganze Viereck (a—x) x heissen. Dieses soll nun ein Maximum seyn. Man multiplicire nun wirklich; so ist

Anwendung dieser Lehre auf Exempel.

Tab. I. Fig. 13.

Wie man eine gegebene Linie theilen müsse, daß der eine Theil die Grundlinie und der andere die Höhe des größten Vierecks, das sich daraus bestimmen läßt, abgebe?

$ax - x^2 =$ Maxim. und

$adx - 2xdx = 0$. Folglich

$adx = 2xdx$

$\overline{\qquad\qquad} : dx$

$a = 2x$ Dahero

x allein oder $x = \frac{1}{2}a$. Also muß die Linie in zween gleiche Theile getheilet werden, da dann die Grundlinie und Höhe gleich sind; folglich ist das Quadrat das größte Viereck, das aus einer gegebenen Linie gemacht werden kann. Verlangt man das größte Dreyeck, das auf den Diameter des Cirkels beschrieben werden kann, so schlägt man einen gleichen Weg ein. Dann es ist eben so viel, als ob man das größte rechtwinklichte Dreyeck in Cirkel verlangte; weil alle Winkel an der Peripherie, die auf einem halben Cirkel stehen, rechte Winkel sind. Nun seye nach der 21. Fig. $AB = a$, AD die Seite des Dreyecks $= x$, so wird, weil bey D ein rechter Winkel ist, $DB = \sqrt{(AB^2 - AD^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ und der Inhalt des Dreyecks selbst $\frac{AD \cdot DB}{2} = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2}$ ein Maximum;

Welches das größte Dreyeck sey, das man auf den Diameter eines gegebenen Cirkels aufrichten könne;

Tab. I. Fig. 21.

folglich auch $x^2a^2 - x^4 =$ Maxim. dahero differentiirt $2a^2xdx - 4x^3dx = 0$.

Folglich

$2a^2xdx = 4x^3dx$

$\overline{\qquad\qquad} : dx$

$2a^2x$

$$2a^2x = 4x^3$$
$$\overline{\qquad\qquad} : 2x$$
$$a^2 = 2x^2$$
$$\overline{\qquad\qquad} : 2$$
$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = x.$$

Demnach ist es das gleichschenklichte Dreyeck: dann weil $AD^2 = x^2 = \frac{1}{2}a^2$, so muß auch $DB^2 = \frac{1}{2}a^2$ seyn; weil $AD^2 + DB^2 = AB^2 = a^2$ nach dem pythagorischen Lehrsatz. Hieraus erhellet nun weiter, daß das größte Viereck, das in einen Cirkel beschrieben werden kann, ein Quadrat sey; weil das Dreyeck ADB die Hälfte von diesem Maximo ist.

Welches das größte Viereck sey, das in einen gegebenen Cirkel sich beschreiben lasse?

§. 214. Wir wollen auch Exempel von den krummen Linien in Absicht auf ihre Abscissen, Semiordinaten u. s. w. geben. Es ist klar, daß bey solchen krummen Linien, die ein Maximum haben, die Tangente unendlich groß wird, folglich auch die Subtangente; dahero die Subnormallinie null ist. In solchen Fällen setzt man also $\frac{ydy}{dx} = 0$; wenn aber dieses ist, so muß auch $dy = 0$ seyn. Zuweilen ist es auch umgekehrt, daß nemlich die Subtangente null, und die Subnormallinie unendlich wird. Der erstere Fall aber kommt häufiger vor. Da wir nun wissen,

Exempel von krummen Linien, und wie diese behandelt werden;

welches die gröste Abscisse im Cirkel seye.

sen, daß der Cirkel ein Maximum hat; so wollen wir seine Gleichung betrachten: sie heißt

$$ax - x^2 = y^2 \quad \text{folglich differentiirt,}$$

$$a\,dx - 2x\,dx = 2y\,dy$$

$$\frac{a\,dx - 2x\,dx}{2y} = dy = 0.$$

$$\underline{\qquad\qquad} \cdot 2y$$

$$a\,dx - 2x\,dx = 0$$

$$a\,dx = 2x\,dx$$

$$\underline{\qquad\qquad} : dy$$

$$a = 2x$$

$$\underline{\qquad\qquad} : 2$$

$$\tfrac{1}{2}a = x.$$

Wenn also die Abscisse dem halben Diameter gleich ist, so wird die gröste Semiordinate gezogen werden können; nämlich der Radius. Man darf nur den Wehrt von x in die Gleichung setzen, so findet man $ax - x^2 = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa = y^2$ folglich $\frac{1}{2}a = y$. Eben so gehet man bey andern krummen Linien zu Werke.

Exempel in Absicht auf das Minimum; Tab. IV. Fig. 66. welches die kleineste Linie sey, die man

§. 215. Wie man das Maximum findet, so kann man auch das Minimum finden. Man solle aus H diejenige Linie an die krumme Linie AM ziehen, welche die kleineste unter allen sey, die man aus gedachtem Punkte ziehen kann. Man setze wie bisher $AP = x$ $PM = y$ $AH = c$

so

so ist $PH = c - x$. Nun ist nach dem Pythagorischen Lehrsatz $MH^2 = PM^2 + PH^2$, folglich $MH^2 = y^2 + (c - x)^2$, da nun die Linie MH die kleineste seyn solle, so muß auch ihr Quadrat das kleineste seyn; folglich $MH^2 = y^2 + (c - x)^2$ ein Minimum; oder wenn man wirklich multiplicirt, $y^2 + c^2 - 2cx + x^2 =$ Min. folglich $2ydy - 2cdx + 2xdx = o$.

aus einem gegebenen Punkt an eine gegebene krumme Linie ziehen könne;

$$\frac{2ydy - 2cdx + 2xdx = o}{ydy - cdx + xdx = o.} : 2$$

Wenn man also den Wehrt von ydy in einer gegebenen krummen Linie für ydy setzt, so wird man die gesuchte Linie finden. Z. E. in der Parabel:

$ax = y^2$ folglich
$adx = 2ydy$ und

$$\frac{adx = 2ydy}{\frac{1}{2}adx = ydy.} : 2$$

Hier haben wir schon den Wehrt von ydy; diesen setzen wir in der obigen Gleichung: da dann herauskommt,

$$\frac{\frac{1}{2}adx - cdx + xdx = o.}{\frac{1}{2}a - c + x = o} : dx$$

demnach

$x = c - \frac{1}{2}a$ und
$\frac{1}{2}a = c - x$.

Da nun in der Parabel die Subnormallinie

linie $\frac{1}{2}a$ heißt §. 209. so ist PH = $\frac{1}{2}a$; folglich muß MH, die gesuchte Linie, die Normallinie seyn, welche auf die krumme perpendicular gezogen werden muß. Eben so findet man bey den übrigen Kegelschnitten, daß die von der Axe an die Peripherie oder an den Perimeter gezogene Perpendicularlinie die kürzeste unter allen sey, welche aus einem gegebenen Punkte gezogen werden können. Das ist nun die Anwendung der Differentialrechnung auf die Lehre von dem Maximo und Minimo, welche um so wichtiger ist, je mehr man aus der Betrachtung der Werke GOttes in der Natur wahrnimmt, daß überall das Maximum und das Minimum darinnen herrschet; wie dann besonders der erst kürzlich durch den Tod der gelehrten Welt allzufrüh entrissene Präsident der Königl. Preuß. Akademie Herr v. Maupertuis den Grundsatz des Minimi in der Natur nicht nur festgestellt, sondern auch zum Beweis des Daseyns eines gütigen und weisen Schöpfers mit einem so lebhaften als scharfsinnigen Witze angewendet hat.

Wie in der ganzen Natur ein Maximum und Minimum statt finde;

Eine Entdeckung, deren Anwendung man besonders dem Hrn. Präsidenten von Maupertuis zu verdanken hat.

Was Integriren heisse, oder was die Integralrechnung sey?

§. 216. Wenn man diejenige Grösse, durch deren Differentiation ein gegebenes Differentiale entstanden, genau finden kann, so heißt es, man habe das Differentiale integrirt; und diese Kunst wird nun überhaupt die Integralrechnung ge-

Das Zeichen der Integration wird erklärt.

genannt. Das Zeichen der Integration ist ein ſ; so wird das Integrale von dx geschrieben ſdx, und das von 2xdx schreibt man ſ2xdx u. s. w. Die Deutschen haben deßwegen das ſ zum Zeichen der Integration erwählet, weil sie das Integrale als die Summe aller Differentialien oder unendlich kleinen Theile der Grösse ansehen: dahero sie durch das lateinische ſ die Summe bezeichnen. In England hingegen heißt die Differentiirkunst, wie wir schon gemeldet, eine Fluxionenrechnung, und dahero das, was wir Integriren nennen, die umgekehrte Fluxionenrechnung. Nachdem wir nun diese Erklärung vorausgeschickt haben, so werden sich die Hauptregeln des Integrirens bald verstehen lassen.

Die Hauptregeln der Integralrechnung;

Das Integrale von dx ist x, und von dx+dy ist es x+y u. s. w. Das hat keine Schwürigkeit; weil ferner das Differentiale xdy + ydx aus xy entstanden ist, so muß sein Integrale, das ist, ſ(xdx + ydx) auch xy seyn. Und weil das Differentiale von $x^2 = 2xdx$, von x^3 aber $3x^2dx$, und allgemein von x^m, $mx^{m-1}dx$ §. 203. so sind die Integralien davon x^2, x^3, x^m u. s. w. Eben so ist das Integrale von

$$\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}, \text{ und } \frac{\int(ydx - xdy)}{y^2}$$

=

$= \frac{x}{y}$ wie man aus §. 203. leicht ersiehet. Man hat dahero nur auf die Art und Weise Achtung zu geben, wie ein Differentiale entsteht, wenn man bemühet ist, sein Integrale wieder zu suchen.

Anzeige der gewöhnlichsten Formeln, wornach die Integration sich richtet.

§. 217. Will man nun eine kurze Regel sich bekannt machen, so darf man nur alle Formeln nach der Ordnung hinschreiben; da dann seyn muß

I. $\int dx = x$ oder $x \mp a$.

II. $\int (dx \mp dy) = x \mp y$ oder $x \mp y \pm a$.

III. $\int (xdy + ydx) = xy$ oder $xy \mp a^2$

IV. $\int adx = ax$

V. $\int (mx^{m-1}dx = x^m$

VI. $\int (\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

VII. $\frac{\int (ydx - xdy)}{y^2} = \frac{x}{y}$.

Wie man beym Integriren die beständige Grössen finde;

Das sind alle Formeln, die einem vorkommen können. Wir haben bey der ersten, zweyten und dritten beständige Grössen addirt und subtrahirt, welches unsere Leser nicht befremden wird, wenn sie sich noch erinnern, daß die beständige Grössen durch die Differentiation Nullen werden; folglich muß man sie bey dem Integriren wieder addiren: was es aber

für

für Grössen seyn müssen, wird man aus der Natur der Gleichung, aus den Figuren, nach welchen sich die Gleichung richtet, und besonders aus der Uebung hie und da am besten lernen. Z. E. wenn ich das Differentiale der Hyperbel $2\,y\,d\,y = x\,d\,y + y\,d\,x$ hätte, so ist sein Integrale $y^2 = xy$; da mir dann gleich einfallen wird, daß die Gleichung zur Hyperbel zwischen den Asymptoten gehöre, und in dieser Gleichung $y^2 = a^2 + yx$ seyn; folglich muß ich bey der Integration a^2 addiren. u. s. w. Doch läugnen wir nicht, daß die Addition und Subtraktion der beständigen Grössen je und je schwer zu bestimmen sey; besonders wenn einige differenzirte Glieder sich gegen einander aufheben. u. s. w. Die meiste Schwürigkeiten aber wird derjenige überwinden, der sich nach den bereits angeführten Regeln fleißig übet.

und wie diese Kunst besonders durch die Uebung und Aufmerksamkeit auf die Gleichungen und Figuren erlernet werde.

§. 218. Unter den angezeigten Formeln kommt die fünfte und sechste am öftesten vor. Man kann dahero eine kurze Regel, sie zu integriren, sich um so eher bekannt machen, weil es Anfängern oft schwer fällt, die Aehnlichkeit einer gegebenen Formel mit den vorgeschriebenen sogleich einzusehen. Z. E. $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx$ ist ein Differentiale, das dem in der sechsten Formel ganz ähnlich ist, und nach selbiger integrirt wird; ungeachtet ein Anfän-

Welche Integrationsformeln am häufigsten vorkommen;

fänger die Aehnlichkeit nicht sogleich bemerken wird. Die allgemeine Regel für die fünfte und sechste Formel ist also diese: **Man vermehrt den Exponenten der veränderlichen Grösse um eins, und dividirt hernach alles mit dem in das Differentiale der ersten Dignität der veränderlichen Grösse (dx) multiplicirten neuen Exponenten.** Zum Ex. $mx^{m-1}dx$ soll integrirt werden. Die veränderliche Grösse heißt x, ihr Exponent ist $m-1$, den vermehrt man um eins, so hat man $mx^{m-1+1}dx = mx^m dx$; das Differentiale der ersten Dignität von der veränderlichen Grösse ist dx, dieses multiplicirt man mit dem neuen Exponenten $m-1+1=m$, so hat man mdx; mit diesem Producte dividirt man $mx^m dx$, so hat man $\frac{mx^m dx}{mdx} = x^m$ das Integrale von $mx^{m-1}dx$. Eben so findet man das Integrale von $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx =$

$$\frac{-\frac{2}{3}x^{-5+1}dx}{-\frac{5}{3}+1\,dx} = \frac{-\frac{2}{3}x^{\frac{-5+3}{3}}dx}{\frac{-5+3}{3}} =$$

$$\frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx}{-\frac{2}{3}dx} = x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^{-2}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}};$$

und das Integrale von $x^m dx = \frac{x^{m+1}dx}{m+1\,dx} = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$, denn wenn man

[Marginal notes: ...nd was für eine allgemeine Regel man dazu wissen müsse? — Anwendung der gegebenen Regel auf allerhand Fälle;]

man wiederum dieses Integrale wirklich differentiirt, so kömmt heraus

$$\frac{m+1}{m+1} x^{m+1-1} dx = x^m dx.$$

Man siehet hieraus die Allgemeinheit unserer Regel: dahero Anfänger wohl thun, wenn sie sich allerhand Exempel von dieser Art vorgeben, und die Regel selbst in eine fertige Uebung bringen.

Von der Quadratur der krummlinichten Figuren.

§. 219. Nunmehro können wir schon den Nutzen der Integralrechnung bey der Quadratur der krummen Linien zeigen. Wenn zwo Semiordinaten parallel und einander so nahe gezogen werden, daß der Bogen Mm von einer geraden Linie nicht abweicht; so ist in der Figur das kleine Viereck PMmp oder Pp . pm das Element oder das Differentiale des Raums Amp. Nun ist MR = Pp = dx und pm = y, folglich Pp . pm = y dx. Das heißt, ydx ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Fläche AMP verändert. Wenn man also aus einer gegebenen Gleichung ydx findet, und hernach integriren kann; so wird der Raum einer solchen Figur gefunden. Z. E. in der Parabel ist: $ax = y^2$ folglich

Tab. IV. Fig. 70.

Wie sich parabolische Stücke durch Hülfe dieser Rechnung völlig quadriren lassen;

$$\sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$\overline{} \, . \, dx$$

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = y dx;$$ dieses

 inte-

integrirt, giebt $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \int y\,dx$.

§. 216.

Nun ist $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$ folglich

$\frac{2}{3}yx = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$; demnach ist der parabolische Raum $Apm = \frac{2}{3}xy$, also vollkommen quadrirt. Das heißt, dieser Raum ist $\frac{3}{2}$ von dem Rectangulo aus der Abscisse in die Semiordinate, oder dieses Rectangulum xy verhält sich zum parabolischen Raum Amp wie 3 zu 2. Eine Quadrirung, welche Archimedes schon gefunden hat. Ob er sie aber durch die Fluxionenrechnung, oder auf eine andere Weise zuerst gefunden hat, ist nicht bekannt. Im erstern Falle müßten die Alten viele Künste, und auch die Differentiationskunst gewußt haben, welche nach der Hand verlohren gieng, und erst von den Neuern wiederum erfunden wurde. Allein es läßt sich die Quadratur der Parabel auch ohne diese Rechnung finden; nur ist es ungleich mühsamer, wenn man die Fluxionenmethode nicht dazu braucht: dahero man eben nicht nöthig hat, zu sagen, Archimedes habe wirklich diese neuerfundene Kunst gewußt. Aber eben dieses gereicht ihm und den Alten überhaupt zu einem desto grössern Ruhme, weil sie ohne die neueren Mittel, die einem die Rechnung un-

und wie Archimedes schon diese Quadratur gewußt habe.

ungemein erleichtern, so schwere Aufgaben auseinander gewickelt und aufgelößt haben.

§. 220. Wenn man eine Parabel quadriren kann, so lassen sich alle durch die allgemeine Rechenkunst quadriren. Dann es sey $a^n x^m = y^r$ so

Eine allgemeine Formel, alle Parabeln zu quadriren.

$$\text{so ist } \sqrt[r]{a^n x^m} = a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} = y$$

$$\text{und } a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} dx = y dx$$

$$\text{dahero } \frac{r}{m+r} a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+r}{r}} = \int y dx.$$

$$\text{Da nun } a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} = y, \text{ so ist}$$

$$\frac{r}{m+r} yx = \int y dx.$$

Man darf also für r und m nur Zahlen setzen, so wird man allerley Parabeln wirklich quadriren können. Nun ist die Frage: ob man nicht auch den Cirkel, durch Hülfe der Fluxionenrechnung, quadriren könne? Wir wollen einen Versuch wagen, da sich dann gleich der Nutzen der Newtonischen Regel für die Potenzen zeigen wird. Es seye der Diameter AB = 1. Die Absciſſe A D = x; so ist DB. = 1 — x, und die Semiordinate ED sol-

Ob man nicht auch den Cirkel durch diese Rechnung quadriren könne?

Tab. II. Fig. 37.

solle y heissen. Folglich

$$y^2 = (1 - x)x = x - x^2$$

$$y = \sqrt{(x - x^2)} = (x - xx)^{\frac{1}{2}}$$

$$. dx$$

$$ydx = dx\sqrt{(x - x^2)} = dx.(x - xx)^{\frac{1}{2}}$$

Wenn man nun das Integrale aus dem letzten Auszug finden kann, so ist der Cirkel quadrirt. Man ziehe also aus $x - x^2$ die Quadratwurzel nach der Newtonischen Regel aus, da dann

Was für eine Methode, den Cirkel zu quadriren, Newton gebraucht habe;

$$P = x, \; Q = -\frac{xx}{x} = -x$$

$m = 1$, $n = 2$. Folglich

$$P^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{1}{2}} = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}. - x = -\tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}. -\tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}. - x =$$

$$-\frac{1}{2.4}x^{\frac{5}{2}} = C, \text{ u. s. w.}$$

Das giebt nun eine unendliche Reyhe, in welchem $ydx = x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{1}{2.4}x^{\frac{5}{2}}dx$ u. s. w. folglich

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4.7}x^{\frac{7}{2}} \text{ u. s. w.}$$

Das ist die Quadratur des Stücks vom Cirkel AED; weil sie Newton gefunden. Herr v. Leibnitz hat die folgende gegeben, und

und gezeigt, daß wenn der Radius = 1, so seye der Cirkelbogen von 45° $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. Dann man ziehe die Linie Cb der andern CB so nahe, daß der Bogen Mm einer geraden Linie gleich kommt; so ist, wenn man Bu auf Cb perpendicular ziehet, und der Radius CA = 1, die Tangente AB = t gesetzt wird, CB, die Secante des Bogens AM nach dem pythag. Lehrsatz

Wie der Herr von Leibniz Tab III. Fig. 57. diese Aufgabe aufzulösen sich bemühet habe;

$= \sqrt{(AC^2 + AB^2)} = \sqrt{(1 + tt.)}$ Da nun
$CB : CA = Bb : Bu$, so ist
$\sqrt{(1+tt)} : 1 = dt : \frac{Bu = dt}{\sqrt{1+tt}}$

Dann Bb ist das Differentiale von der Tangente AB, folglich wird es durch dt ausgedruckt. Es ist aber ferner
$CB : Bu = CM : Mm$; das ist
$\sqrt{(1+tt)} : \frac{dt}{\sqrt{(1+tt)}} = 1 : \frac{dt}{\sqrt{(1+tt)} . \sqrt{(1+tt)}} = \frac{dt}{1+tt}$

Demnach ist das Differentiale von dem Bogen $AM = \frac{dt}{1+tt}$; dieses wird nun entweder nach der Newtonischen Regel, oder durch das gewöhnliche Dividiren, weil $\frac{dt}{1+tt} = \frac{1 \cdot dt}{1+tt}$, in eine unendliche

und wie er gefunden, daß der rectificirte Bogen von 45° $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ u.s.w.

Reyhe verwandelt: da dann tt = 1 wird, wenn der Bogen 45° hält, weil in diesem Falle die Tangente dem Radius, welcher hier eins gesetzt wurde, gleich wird. Da es dann nach §. 73. folgende Progression gibt $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. wodurch der rectificirte Bogen von 45° ausgedruckt wird. Ein Ausdruck, der uns nun auch auf die Rectification der krummen Linien führet.

Von der Rectification der krummen Linien überhaupt;

§. 221. Die Rectification der krummen Linien ist nach der Bedeutung dieses Worts nichts anders, als die Kunst, eine krumme Linie in eine gerade Linie zu verwandeln, oder eine gerade Linie zu erfinden, welche den gegebenen krummen Linien gleich sey. Daß nun dieses möglich sey, erhellet daraus, weil eine jede krumme Linie aus unendlich viel unendlich kleinen geraden Linien bestehet, oder weil man sich selbige wenigstens also vorstellen kann. Darauf kommt demnach alles an, daß man einen solchen unendlich kleinen Theil der krummen Linie findet, und hernach ihn integrirt. Zur Erfindung des unendlich kleinen Theils ist uns der pythagorische Lehrsatz, und zu seiner Integration die Newtonische Regel von Ausziehung der Wurzeln behülflich. Denn nach jenem ist mM ein solch unendlich kleiner Theil der krummen Linien, man mag sie auf der converen

Wie das Element einer zu rectificirenden krummen Linie ausgedruckt werde; Tab. IV. Fig. 70. 71.

oder

oder hohlen Seite betrachten, allemal $= \sqrt{(mR^2 + RM^2)}$ das ist in Buchstaben $mM = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; dahero darf man nur aus der Gleichung für die krumme Linie das Element mM oder $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ und hernach die Wurzel durch die Approximation suchen. Z. E. in der Parabel ist

Anwendung der Rectificationsregel auf die Parabel;

$$ax = y^2 \text{ und}$$

$$adx = 2ydy \text{ dieses quadrirt, giebt}$$

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$\text{———} : a^2$$

$$dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$$

$$dy^2 = dy^2 \text{ addirt, giebt}$$

$$dx^2 + dy^2 = dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{a^2}$$

$$\text{———} : \sqrt{}$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(dy^2a^2 + 4y^2dy^2)}{a^2}}$$

$$= \frac{dy\sqrt{(a^2+4y^2)}}{a}$$

Wann ich nun $\frac{dy\sqrt{(a^2+4y^2)}}{a}$ integriren kann, so habe ich den parabolischen Bogen gefunden, oder in eine gerade Linie verwandelt. Man versuche es dahero, und

Nebst Anzeige des grossen Nutzen, den die Newtonische Approximationsre-

gel hier äussert.

und ziehe nach der Newtonischen Regel aus $a^2 + 4y^2$ die Quadratwurzel aus; da dann $m = 1$, $n = 2$, $P = a^2$ und

$$Q = \frac{4y^2}{a^2} \text{ folglich}$$

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{\frac{1}{2}a \cdot 4y^2}{a^2} = \frac{2y^2}{a} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \frac{2y^2}{a} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = \frac{-2y^4}{a^3} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \frac{2y^4}{a^3} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = \frac{4y^6}{a^5} = D$$

u. s. w.

Folglich ist $\frac{dy\sqrt{(a^2+4y^2)}}{a} = \frac{ady}{a}$ das ist

$$= dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} \text{ u. s. w.}$$

und das Integrale oder $\frac{\int(dy\sqrt{a^2+4y^2}}{a}$

$$= y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} \text{ u. s. w.}$$

Allgemeinheit der gegebenen Regel;

Auf diese Weise werden nun alle krumme Linien rectificirt; wenn man nur die Newtonische Regel schicklich dabey anbringt. Man siehet hieraus schon den vor-

vorzüglichen Nutzen dieser höchstbrauchbaren Regel, welche wir, wenn wir weitläuftig seyn wollten, mehr als zwanzigmal bey der Rectification der krummen Linien anbringen könnten: allein uns genüget, an einem Exempel gewiesen zu haben, wie man die andere zu behandeln. Uebrigens ist ohne unser Erinnern klar, daß man die Krümme nicht ganz genau finden kann, weil das Integrale eine unendliche Reyhe giebt.

Warum man bey der versuchten Rectification die Krümme nicht ganz genau finden könne?

§. 220. Es ist noch übrig, daß wir zeigen, wie man durch Hülfe der Integralrechnung aus der gegebenen Tangente oder Subtangente u. s. w. die Gleichung für die krumme Linie finde, deren Tangente sie ist. Alle Subtangenten werden, wie wir oben gehört, durch die allgemeine Differentialformel $\frac{ydx}{dy}$ ausgedruckt; wird nun ein anderer Ausdruck für die Subtangente, z. E. der Ausdruck $\frac{2y^2}{a}$ gegeben, so muß er dem obigen vollkommen gleich seyn. Nun wollen wir die krumme Linie suchen, deren Subtangente $\frac{2y^2}{a}$ ist; Es ist klar, daß

Wie man durch Hülfe der Integralrechnung aus der gegebenen Subtangente u. s. w. die krumme Linie finden könne;

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a} \text{ folglich}$$

$$a y d x = 2 y^2 d y$$
$$\overline{\qquad\qquad} : y$$
$$a dx = 2 y dy$$, dieses integrirt, giebt

$ax = y^2$ eine Gleichung für die Parabel. Auf diese Weise lassen sich eine Menge krummer Linien bestimmen, wie unsere Leser von selbst einsehen werden. Eine ist besonders noch merkwürdig, nämlich die Logistik, weil sie uns einen Begriff von den logarithmischen Differentialien und Integralen beybringen wird. Wir wissen aus §. 211. daß ihre Subtangente eine beständige Linie ist; nun wollen wir umgekehrt diejenige krumme Linie suchen, deren Subtangente unveränderlich ist. Es seye demnach die Subtangente = a, oder welches zu unserm Vorhaben einen noch schicklichern Ausdruck giebt, = 1; weil 1 so gut unveränderlich ist als a. Diesem zu Folge wird die Subtangente algebraisch ausgedruckt seyn $\frac{y dx}{dy} = 1$.

und wie man besonders aus der gegebenen Subtangente der Logistik nicht nur die Logistik finden, sondern auch den Ausdruck für die logarithmische Differentialien bestimmen könne;

$$\overline{\qquad\qquad} . dy$$
$$y dx = dy$$
$$\overline{\qquad\qquad} : y$$
$dx = \frac{dy}{y}$ Nun ist §. 199.

$dx = l.dy$; weil $x = l.y$ §. cit. folgl.

$\frac{dy}{y} = l.dy$.

Ausführlicher Beweis, daß das logarithmische Differentiale von y sey $\frac{dy}{y}$.

Hier

Hier haben wir also einen allgemeinen Ausdruck für alle logarithmische Differenzialien; z. E. das logarithmische Differentiale von z ist $\frac{dz}{z}$, das von x ist $\frac{dx}{x}$, das von v ist $\frac{dv}{v}$ u. s. w. Ein Ausdruck, den der berühmte Herr Joh. v. Bernoulli erfunden, und ihn besonders bey den Exponentialgrössen gemeinnützig gemacht hat. Dann eine Exponentialgrösse ist diejenige, deren Exponent veränderlich ist. Z. E. x^y, z^x u. s. w. Wenn ich also x^y differenziren solle, so darf ich diese Grösse nur einer andern z. E. der Grösse z gleich setzen, und hernach den gegebenen Regeln zu Folge differenziren. Es seye also . $x^y = z$ folglich logarithmisch ausgedruckt, $ylx = lz$; §. 95. u. differentiirt

Warum dieser Ausdruck allgemein seye; wer ihn erfunden habe, und wie er vorzüglich bey Exponentialgrössen seinen Nutzen äussere; was eine Exponentialgrösse seye, wie eine solche Grösse differenzirt werde;

$$lxdy + \frac{ydx}{x} = \frac{dz}{z}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} . z$$

$$zlxdy + \frac{zydx}{x} = dz.$$

Wenn man nun den Werth von z nemlich x^y in der Gleichung wieder setzet, und sich noch erinnert, daß $\frac{x^y}{x} = x^{y-1}$ seye, wie wir §. 59. bewiesen: so hat man

x^y

und wie man es wiederum integrire;

$x^y lx dy + y x^{y-1} dx = dz$; das Differentiale von der Exponentialgrösse x^y. Will man ein solches Differentiale wieder integriren, so muß man an das, was wir von unendlichen Reyhen gesagt haben, zurück denken. Wir haben bewiesen, daß $l. dy = \frac{dy}{y}$; nun wollen wir die gegebene Grösse y um 1 vermehren, und fragen, was demnach das logarithmische Differentiale von $y + 1$ seye? Die Antwort ist leicht: dann weil das logarithmische Differentiale von $1 = d\frac{1}{1} = \frac{0}{1} = 0$; so wird das von $y + 1$ seyn $\frac{dy}{y+1} = dy . \frac{1}{y+1}$.

und wie das Integrale davon eine unendliche Reyhe gebe;

Nun ist $\frac{1}{y+1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ u.s.w. §. 73 folgl. $\frac{dy.1}{y+1} = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$ und sein Integrale oder

$$\frac{\int dy}{y+1} = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \text{ u.s.w.}$$

und warum zu Erhaltung dieser Progression die gegebene Grösse bald um eins vermehrt bald vermindert werden müsse;

In welchem Falle die gegebene Grösse um 1 vermehrt worden ist; man siehet leicht, daß sie auch um 1 vermindert werden könne, da dann die Zeichen + und — nicht abwechseln. §. 73. Die Ursache, warum man die gegebene Grösse bald um 1 vermehren oder vermindern muß, erhellet dar-

daraus, weil man sonsten die Glieder der Reyhe, die ins unendliche fortgehet, nicht bestimmen könnte. Daß es aber eine solche Reyhe geben müsse, ersiehet man aus der gewöhnlichen Integralregel: denn wenn $\frac{dy}{y}$ nach der allgemeinen Regel integrirt werden solle, so habe ich, weil

Wie man aus der Natur der Integralrechnung beweisen könne, daß das logarithmische Integrale eine solche Progreßion überhaupt geben müsse;

$$\frac{dy}{y} = y^{-1}dy$$

das Integrale $\frac{y^{-1+1}dy}{-1+1dy} = \frac{y^{-1+1}}{-1+1}$

$= \frac{y^{0}}{0} = \frac{1}{0} = \infty$. Dieser allgemeine Ausdruck, der mich zwar auf eine unendliche Reyhe überhaupt weiset, zeiget mir nichts destoweniger noch keine bestimmte Glieder der Reyhe an, nach welchen ich das Integrale durch die Approximation finden könnte. Dahero pflegt man, die Glieder der Reyhe zu bestimmen, die gegebene Grösse um 1 bald zu vermehren bald zu vermindern, je nachdeme es die Schiklichkeit der Rechnung erfordert. Wenn man also z. E. die logarithmische Differentialgrösse xlxdx zu integriren hätte, so setzet man $x=y+1$, folglich wird $lx=l(y+1)$ und $dx=dy+0=dy$; da sich dann nach den obigen Bestimmungen das Integrale in einer unendlichen Reyhe richtig ergeben wird, wenn man nur

und wie deßwegen die Vermehrung oder Verminderung um eins nöthig seye.

nur bemerkt, daß, weil $y + 1 = x$ gesetzt wurde, hernach $y = x - 1$ in der Reyhe sey.

Von einigen Fällen, in welchen man die Differentialien nochmalen differenziren müsse;

§. 223. Endlich und letztens gibt es auch noch manche Fälle, in welchen man nicht zurecht kommen kann, es seye dann, daß man die Differentialgrössen noch einmal u. s. w. differentiire. Wenn man z. E. bey einer krummen Linie, dergleichen die Schlangenähnliche sind, den äussersten Punkt finden will, wo sich die Linie auf die eine oder die andere Seite lenket (punctum flexus contrarii) folglich die gröste oder kleinste Semiordinate hat: so muß das Differentiale davon noch einmal differentiirt werden. Der Fall ist nämlich dieser, wenn die krumme Linie zuerst ihre hohle und hernach die convexe Seite, oder umgekehrt, der Axe zukehret; da denn das differentiirte Differentiale entweder positiv oder negativ werden muß, wie man aus der 71. Fig. begreifft, wenn man nur mit MP und mR im Sinne Parallellinien ziehet, in welchem Falle die verlängerte Tangente das sogenannte Differentio-Differentiale abschneiden und bestimmen wird.

z. E. bey solchen krummen Linien, die ein punctum flexus contrarii haben.

Eine ähnliche Beschaffenheit hat es mit den sogenannten Evoluten, und den durch die Evolution erzeugten krummen Linien; deren Berechnung abermal auf der Kunst Differentialien zu differentiiren beruhet. Hugenius hat diese Art krum-

Ferner bey den aus der Evolution erzeugten krummen Linien u. s. w.

krummer Linien zuerst mit einem beson-
dern Namen beleget, und ihren Nutzen
bey den oscillirenden Uhren in der Mecha-
nik gezeigt. Den allgemeinen Begriff
davon kann man sich leicht bilden, wenn
man eine Schnur oder einen Faden, der
um eine krumme Linie, z. E. um einen
Cirkel herumgewunden ist, nach und nach
so abwindet, daß die abgewundene Schnur
immer eine gerade Linie, und gleichsam der
beständig veränderte Radius der krum-
men Linie wird, welche sich durch diese
Evolution erzeuget. Herr von Leibniz
hat diese Linie den Radium osculi ge-
nannt: daherdie Evolute, oder dieseni-
ge krumme Linie, von welcher die Schnur
abgewunden wird, der geometrische Ort
von allen diesen Radiis in Rucksicht auf
ihre Mittelpunkte ist. Wir haben zwo
Gattungen von krummen Linien nam-
haft gemacht, bey welchen man die Dif-
ferentio-Differentialien nöthig hat. Es
ist aber ohne unser Erinnern klar, daß es
deren noch mehrere geben muß; von de-
nen wir aber, alle Weitläuftigkeit zu ver-
meiden, nichts weiter melden, und nur
zum Beschluß noch zeigen wollen, wie
man dann ein Differentiale von neuem
differentiirt. Die ganze Kunst bestehet
in der Reduction, die wir vortragen wer-
den, wenn wir zuvor von der Art und
Weise, wie ein Differentio-Differentia-

Der allgemeine Begriff solcher Linien, die aus der Evolution erzeuget werden, wird vorgetragen.

Wie es noch mehr dergleichen Linien gebe, bey welchen die Differentio-Differentiation angewandt wird;

was Differentio Differentialien seyen;

und wie man auch die Differentio-Dif-

 le

ferentialien von neuem differenziren könne;

le ausgedruckt wird, das nöthigste gesagt haben. Gleichwie das Differentiale von x genannt wird dx, so schreibt man das Differentiale von dx wiederum ddx, und das von ddx heißt dddx. Damit man sich nun kürzer ausdrucke, so schreibt man statt ddx nur d^2x, und statt dddx, d^3x u. s. w. Es gibt dahero verschiedene Gattungen von Differentialien: denn dx ist eines vom ersten Grad, d^2x vom zweyten, d^3x vom dritten Grad u. s. w. Wenn man nun eine gegebene Grösse wirklich differentio - differentiiren will, dann so heißt man diese Rechnung, so wird die Operation nach eben denjenigen Regeln gemacht, nach welchen man die Differentiation vom ersten Grad verrichtet. Das wollen wir jetzo beweisen. Es kommt auch hier alles auf die Differentio - Differentiation zweyer sich multiplicirenden Grössen an. Z. E. man solle xdx nochmalen differentiiren. Man setze

dahero es solche Differentialien vom ersten, zweyten, dritten Grad u. s. w. gibt;

wie man sie schreibe und ausdrucke.

die Differentio-Differentiation hat eben die Regeln, welche die Differentialien vom ersten Grad befolgen;

wie ein Differentialproduct von neuem differenzirt werde;

$xdx = z$; so hat man

$dx = \frac{z}{x}$ folglich

$d^2x = \frac{xdz - zdx}{x^2}$ §. 205.

$\overline{\qquad\qquad} \cdot x^2$

$x^2d^2 = xdz - zdx$

$zdx = zdx$ addirt

---

zdx

$zdx + x^2 d^2x = xdz$, da nun gesetzt wurde $z = xdx$ so ist, wenn man gleiches für gleiches setzt,

wird durch die Reduction gezeigt, und daraus die allgemeine Regel nochmalen bekräftiget;

$$xdxdx + x^2 d^2x = xdz$$

$$\overline{} : x$$

$dxdx + xd^2x = dz$ das Differentio-Differentiale von xdx; und weil $dxdx$ kürzer ausgedruckt dx^2 heißt, so ist der nochmalen differenzirte Ausdruck von $xdx = dx^2 + xd^2x$, das ist, dx multiplicirt ins Differentiale von x, und x multiplicirt in das neue Differentiale von dx; dahero ist die Differentio-Differentiationsregel mit der Differentiationsregel einerley. Wie man nun durch die Reduction alles differenziren kann, wenn man ein Product zweyer Grössen zu differenziren weiß; so wird man auch in dieser letztern Rechnung die Potenzen der Differentialien, u. s. w. leicht differenziren können. Z. E. das Differentiale von dx^2 ist $= 2dxd^2x$ aus eben dem Grunde, aus welchem das Differentiale von $x^2 = 2xdx$. Das von $dy^2 = 2dyd^2y$, u. s. w. Eben so geht es bey der Division: dann das Differentio-Differentiale von $\frac{x}{dx}$ wird seyn $\frac{dx^2 - xd^2x}{dx^2}$ u. s. w. §. 205. Diß ist nun das wichtigste und vornehmste, was wir von dieser Lehre sagen wollten. Einem

Anwendung der Regel auf die Differentio-Differentiation der Potenzen, u. s. w.

Beschluß des ganzen Werks.

nem aufmerksamen Leser wird nichts unverständlich vorkommen, wenn er sich diese Sätze bekannt gemacht hat, und hernach auch selbst in der anwendenden Mathematik sich umsehen will. Wir glauben dahero die sogenannte **reine Mathematik**, oder die ersten Gründe aller mathematischen Wissenschaften, also vorgetragen zu haben, daß sowohl Leser als Zuhörer ihr Verlangen dadurch stillen können.



